Simple harmonic motion

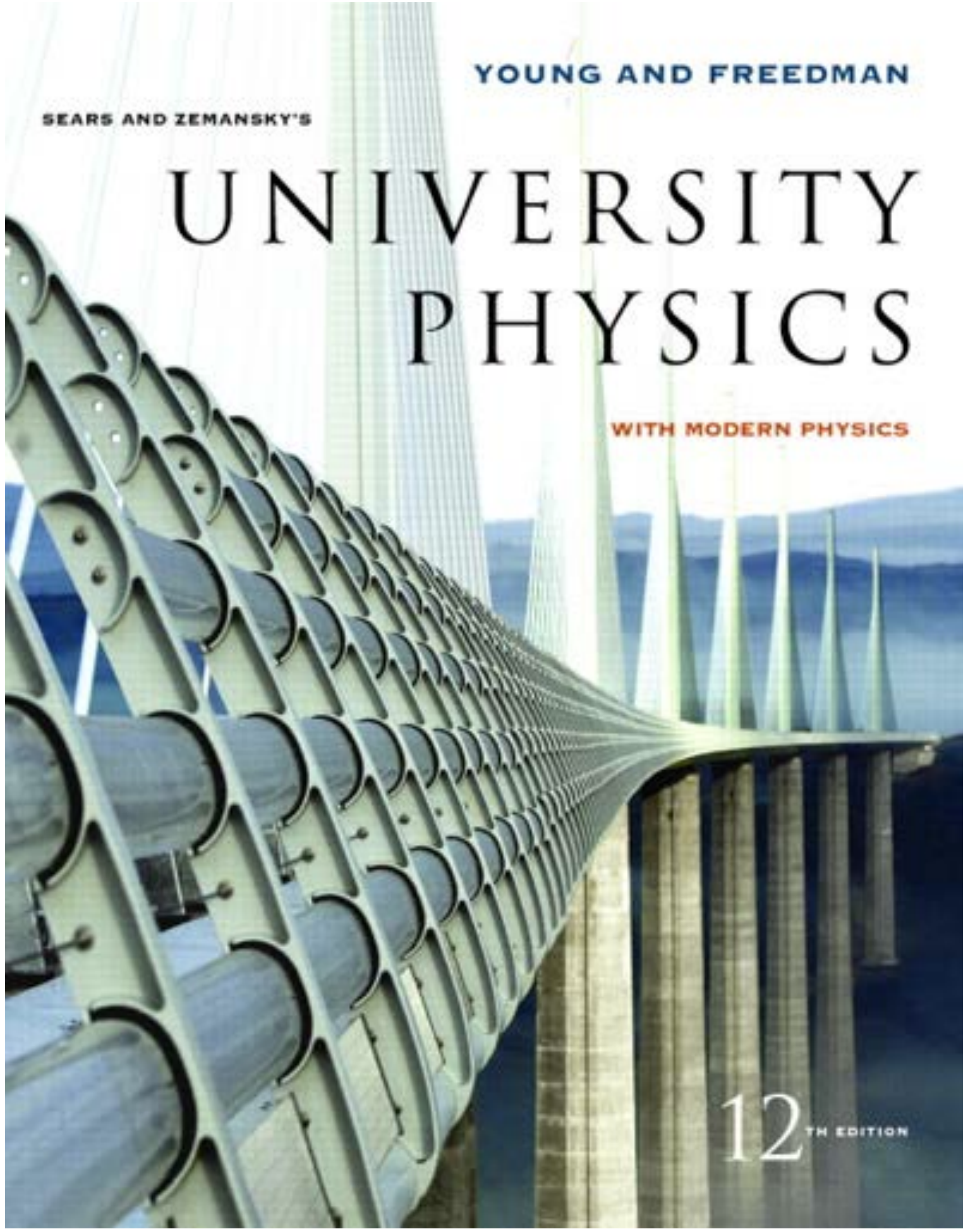
N. Srimanobhas
Norraphat.Srimanobhas@mail.cern.ch

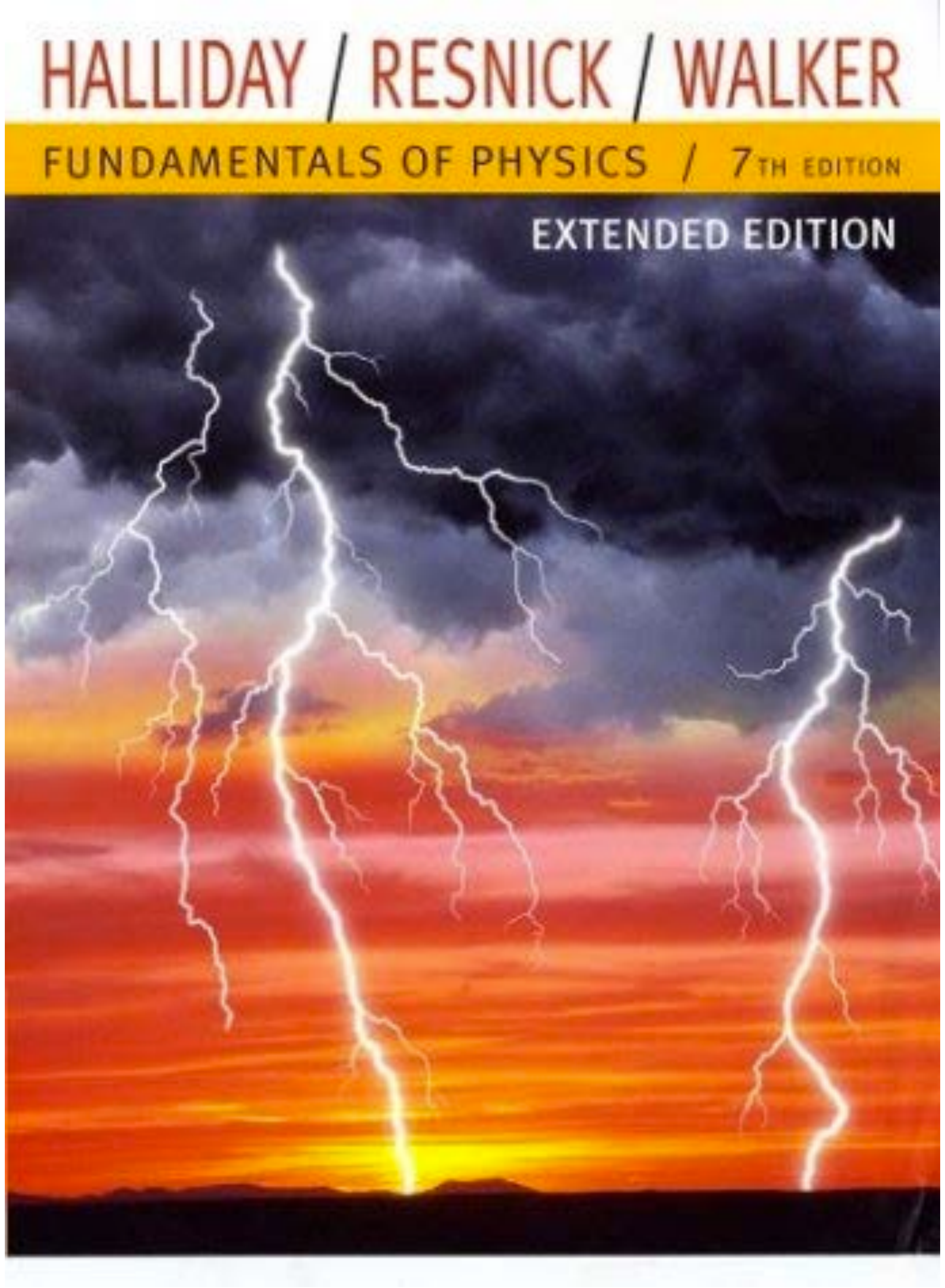
https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/Main/PhatSrimanobhasTeachingCU

Contents

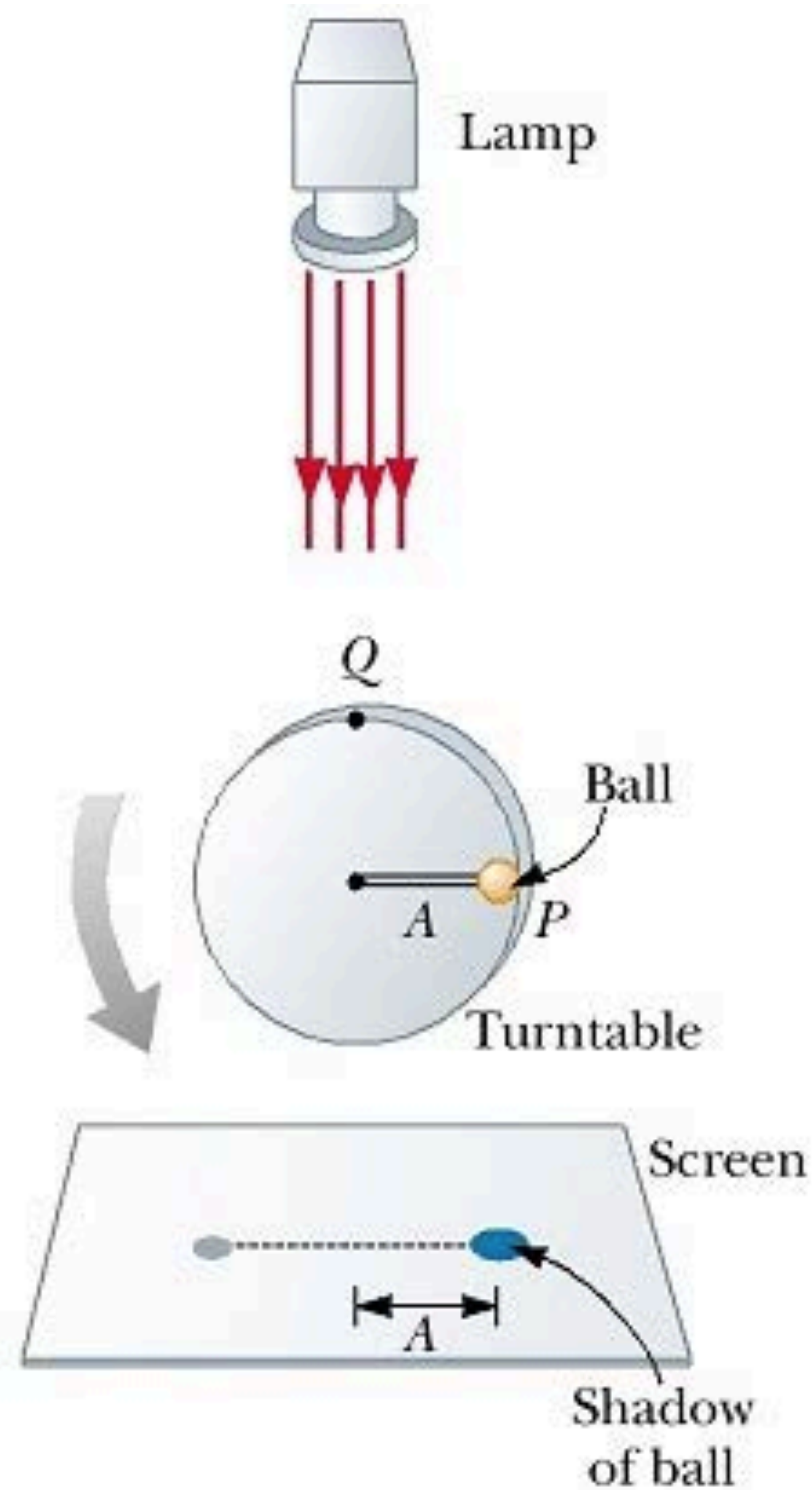
- **Simple harmonic motion**
  - Uniform circular motion
  - Simple harmonic motion
    - Energy
  - Simple pendulum
    - Small-angle approximation
  - Physical pendulum
  - Torsion pendulum
  - Damped oscillations
  - Forced oscillations and resonance
  - Summary

References

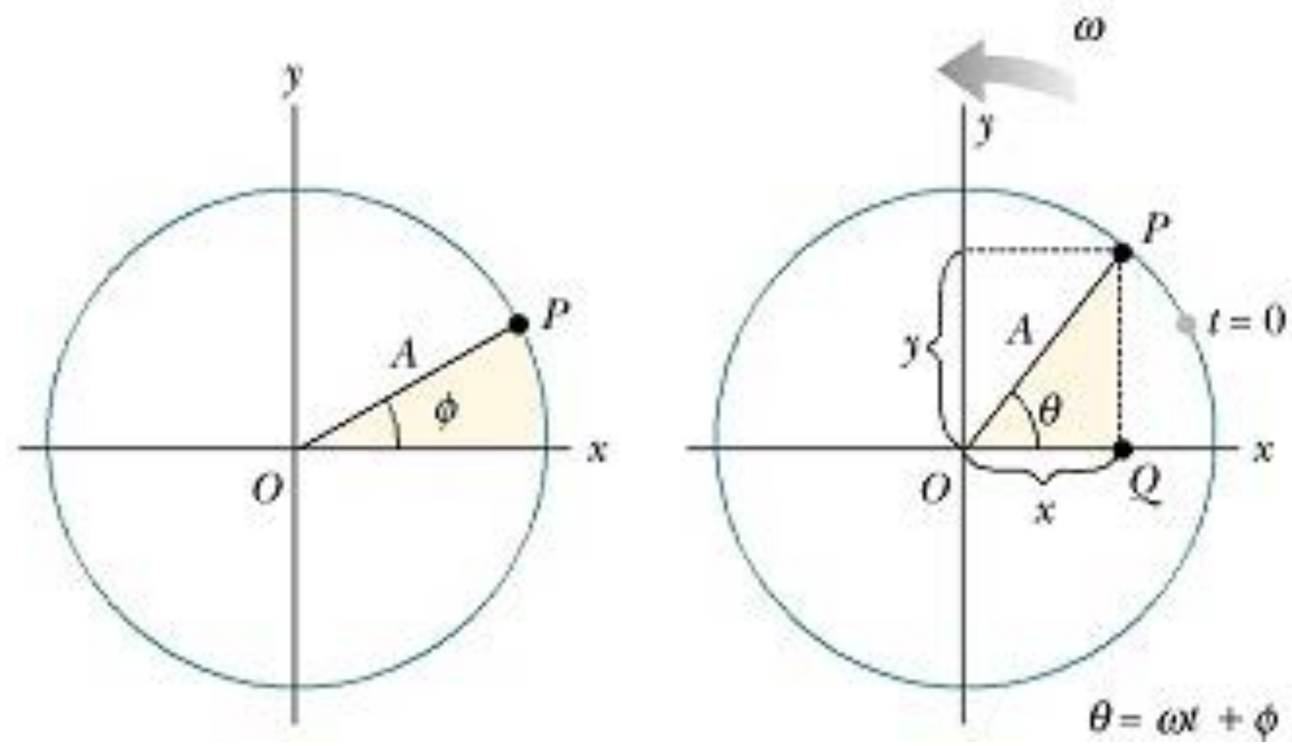

YOUNG AND FREEDMAN
SEARS AND ZEMANSKY'S
UNIVERSITY PHYSICS
WITH MODERN PHYSICS
12TH EDITION


HALLIDAY / RESNICK / WALKER
FUNDAMENTALS OF PHYSICS / 7TH EDITION
EXTENDED EDITION

Uniform circular motion



Angular velocity
(ใน circular motion)



$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

เราสามารถเลือกใช้ Sine หรือ Cosine ก็ได้

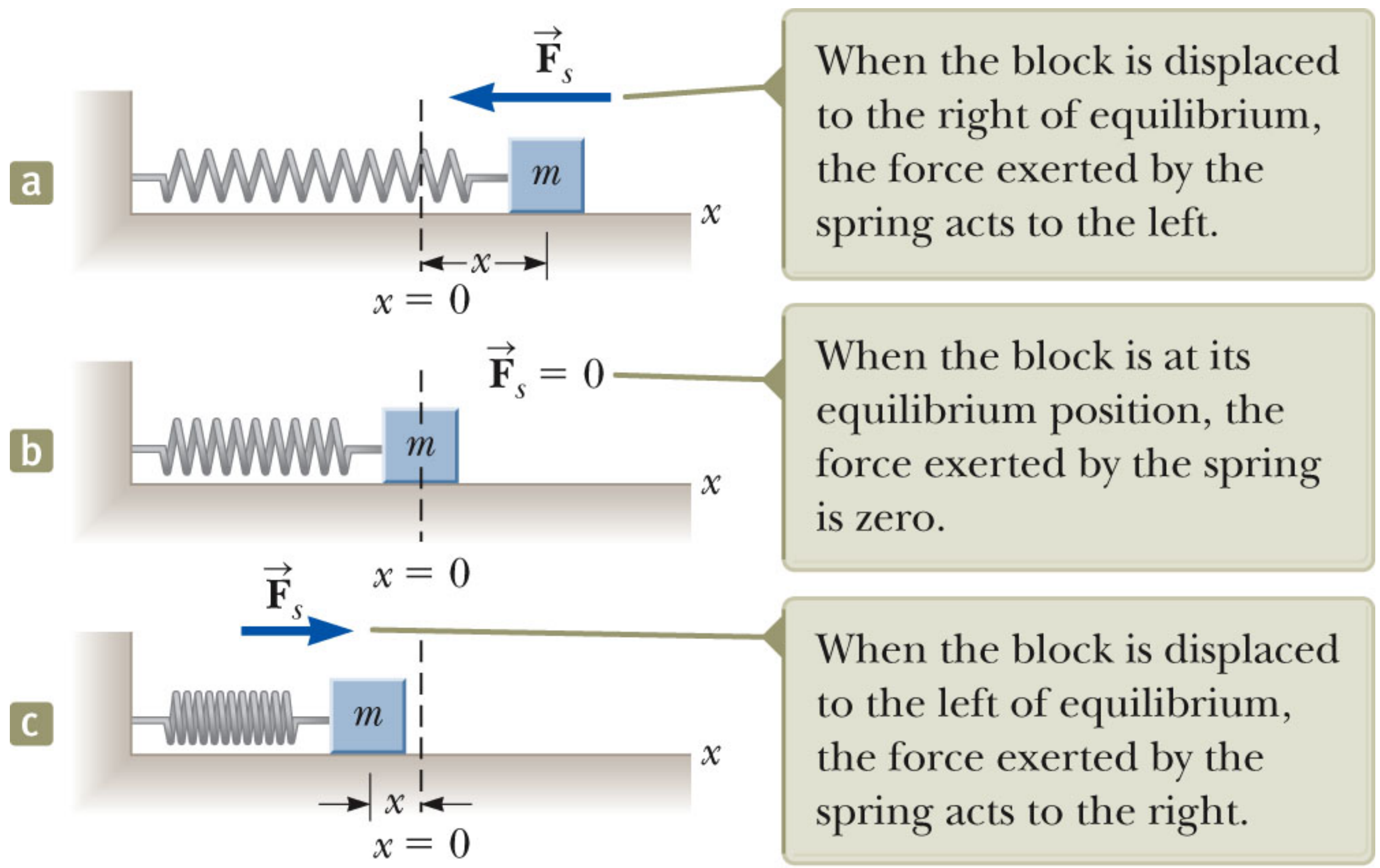
$$T = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T}$$

คาบ (Period) ความถี่ (Frequency)

Simple harmonic motion

การเคลื่อนที่แบบ SHM เป็นรูปแบบหนึ่งของ periodic motion โดยมีเงื่อนไขคือ

- แรง (แรงคืนตัว) แปรผันตรงกับการกระจัดจากจุดสมดุล
- แรงมีทิศทางเข้าหาจุดสมดุล (equilibrium position) เสมอ
- แรงมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับการกระจัดเสมอ



$$F = -kx$$ ← กฎของฮุค

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x} ; \omega^2 = \frac{k}{m}$$

SHM

Angular frequency

Simple harmonic motion

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,;\omega = \sqrt{k/m}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

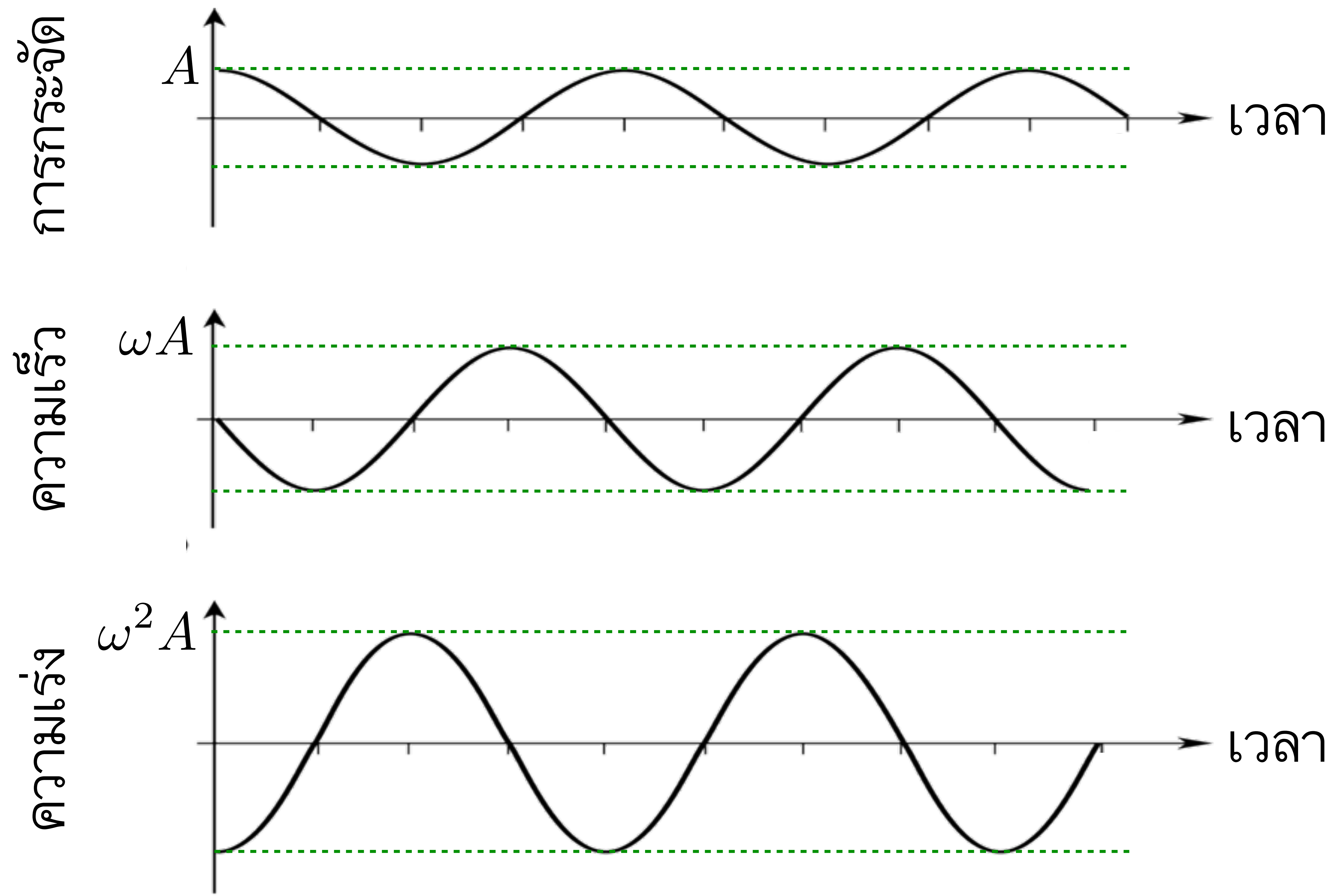
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \leftarrow$$

ย้อนกลับไปเป็นสมการ SHM นั่นเอง

ฟังก์ชั่น sine กับ cosine นั่นมีค่าอยู่ระหว่าง [-1,1] หมายความว่า

- วัตถุเคลื่อนที่อยู่ระหว่าง [-A,A]
- อัตราเร็วสูงสุดอยู่ที่ ωA
- อัตราเร่งอยู่ที่ $\omega^2 A$
- จงบอกตำแหน่งที่วัตถุมี (1) อัตราเร็วสูงสุด และ (2) อัตราเร่งสูงสุด

Simple harmonic motion



Simple harmonic motion

เราสามารถหา

- อัตราเร็ว ในรูปแบบของการกระจัด

$$
\begin{aligned}
v^2(t) &= \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\
&= \omega^2 A^2 (1 - \cos^2(\omega t + \phi)) \\
&= \omega^2 (A^2 - x^2(t))
\end{aligned}
$$

- มุมเฟสเริ่มต้น ในรูปแบบของการกระจัดและความเร็ว

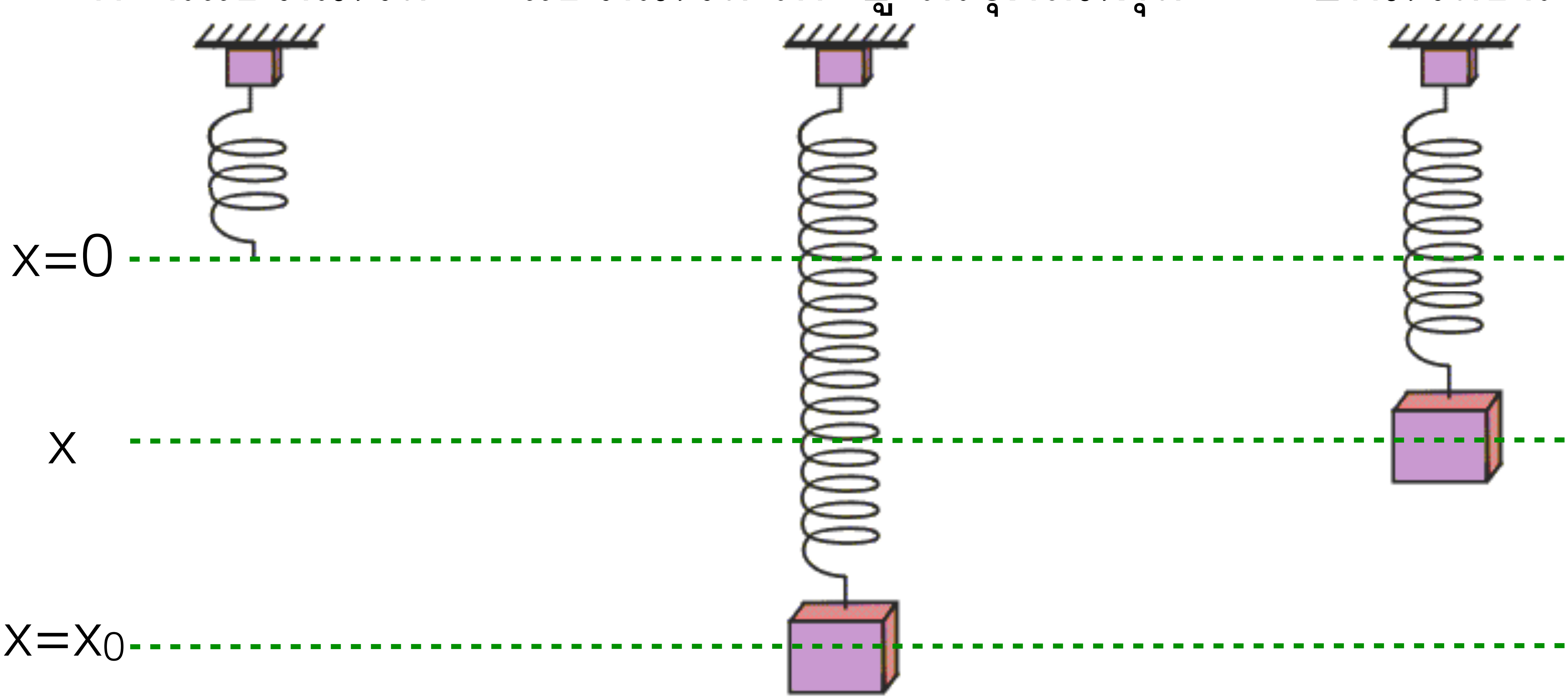
$$
\frac{v_0}{x_0} = -\omega \tan(\phi)
$$

$$
\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)
$$

Example - 1

ถ้าเราแขวนสปริงอันหนึ่งที่มีค่าคงตัวสปริง k และแขวนมวล m ไว้กับด้านล่างของสปริง ให้มวลอยู่ในจุดสมดุล จากนั้นยกมวลสูงขึ้นกว่าจุดสมดุลเป็นระยะ x จงแสดงว่ามวลจะมีการเคลื่อนที่แบบ SHM

ก่อนแขวนมวล　　แขวนมวลให้อยู่ในจุดสมดุล　　ยกมวลขึ้น x



http://images.tutorvista.com/content/oscillations/block-spring-shm.gif

Example - 1

ถ้ากำหนดให้ k = 50 N/m, m = 50g, x = 5 cm จงหา

- อำพล (Amplitude) และค่าความถี่เชิงมุม รวมทั้งเฟสเริ่มต้น
- คาบการเคลื่อนที่และความถี่
- อัตราเร็วและอัตราเร่งของมวล m ณ เวลา 3 วินาทีหลังปล่อย

Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

- ไม่มีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน
- มวลสปริงมีค่าน้อยมาก
- แรงของสปริงเป็นแรงอนุรักษ์

➡ ผลรวมของงานทั้งหมด ที่เกิดขึ้นจากแรงดังกล่าว ในเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ครบรอบ มีค่าเป็นศูนย์

➡ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าว ในการเคลื่อนที่ระหว่างสองจุดใดๆ ไม่ขึ้นกับเส้นทาง

- พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่า<u>คงตัว</u>

Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

- พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่าคงตัว
  - ➡ พลังงานจลน์

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

  - ➡ พลังงานศักย์

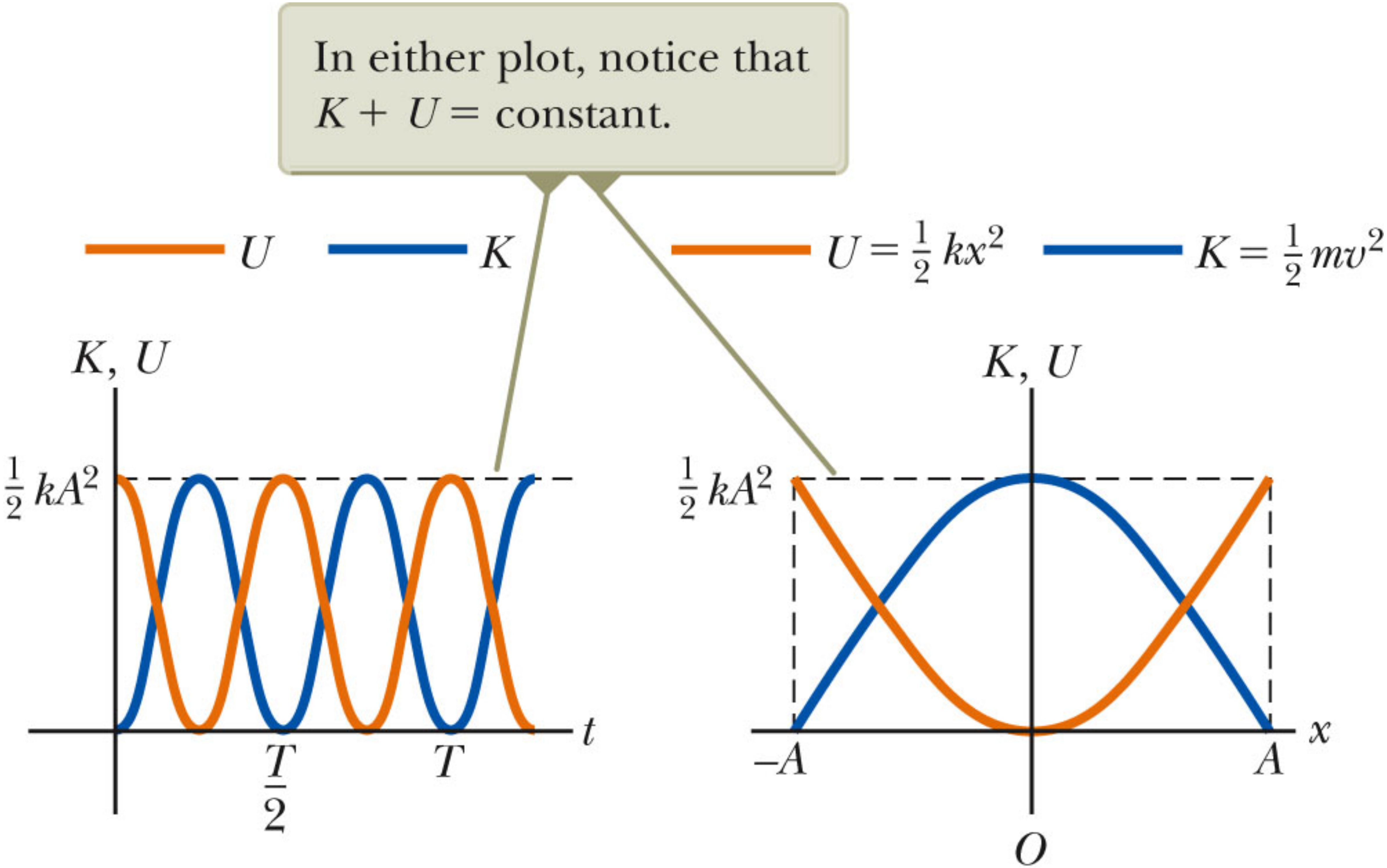
$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

  - ➡ พลังงานกล = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)\\ &= \frac{1}{2}kA^2\end{aligned}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$$

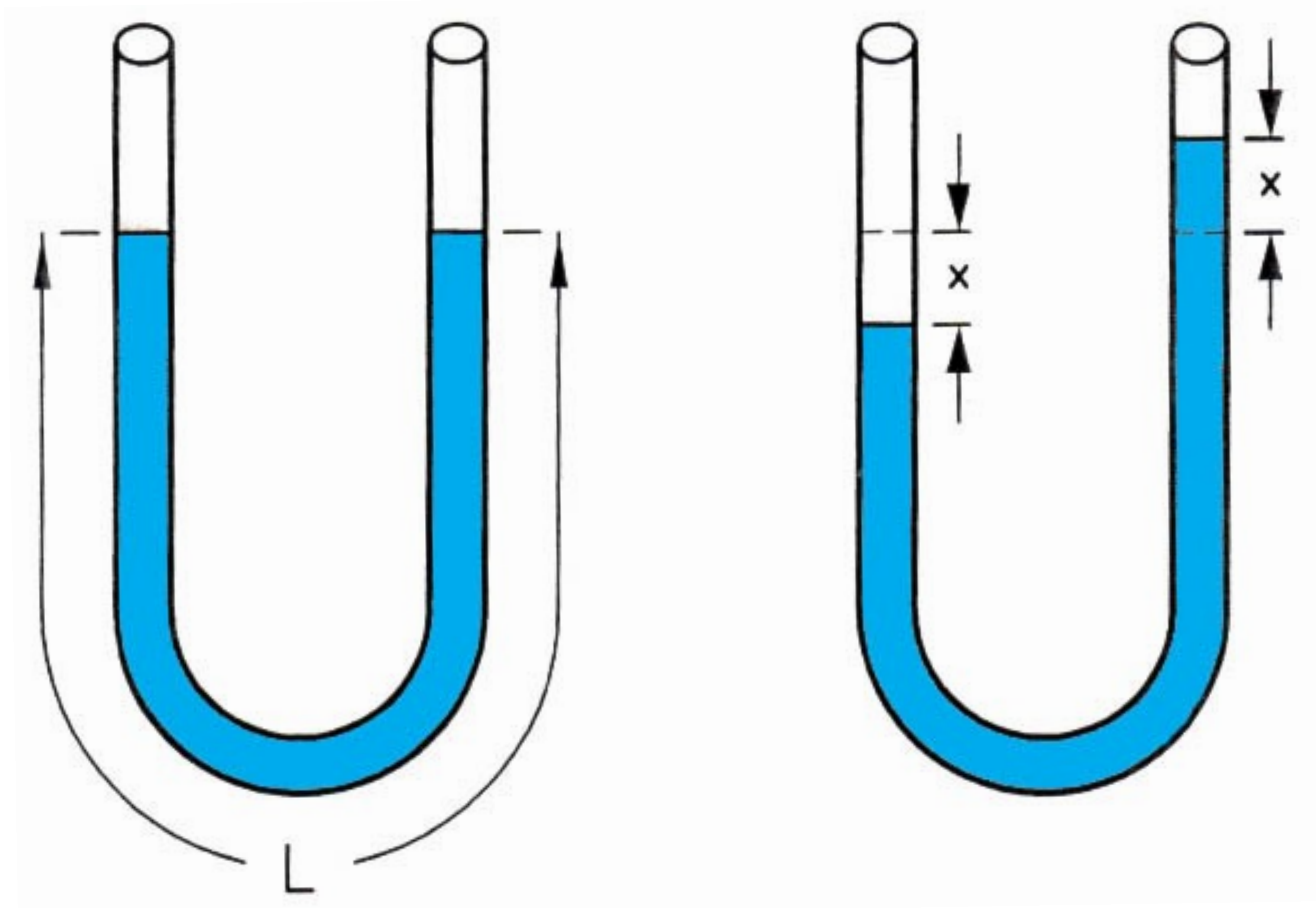
Energy



In either plot, notice that $K + U =$ constant.
U
K
$U = \frac{1}{2}kx^2$
$K = \frac{1}{2}mv^2$
K, U
$\frac{1}{2}kA^2$
t
$\frac{T}{2}$
T
K, U
$\frac{1}{2}kA^2$
x
$-A$
A
O

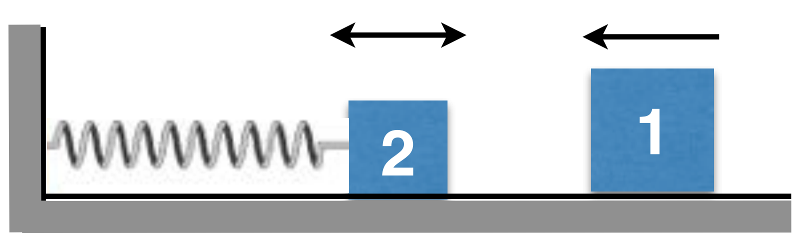
Example - 2

จงหาสมการบรรยายถึง SHM และค่าความถี่เชิงมุมของระบบท่อน้ำปลายเปิดรูปตัว U ที่เกิดการสั่น โดยไม่คิดถึงแรงเสียดทานภายในท่อ ให้น้ำมีมวล M ความหนาแน่น ρ และท่อปลายเปิดมีภาคตัดขวาง A



Example - 3

กล่องหมายเลข 2 มีมวล 2.0 kg ติดอยู่ที่ปลายสปริงดังรูป กำลังเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีคาบเป็น 20 ms และกำหนดให้ตำแหน่งของกล่องเป็นไปตามสมการ

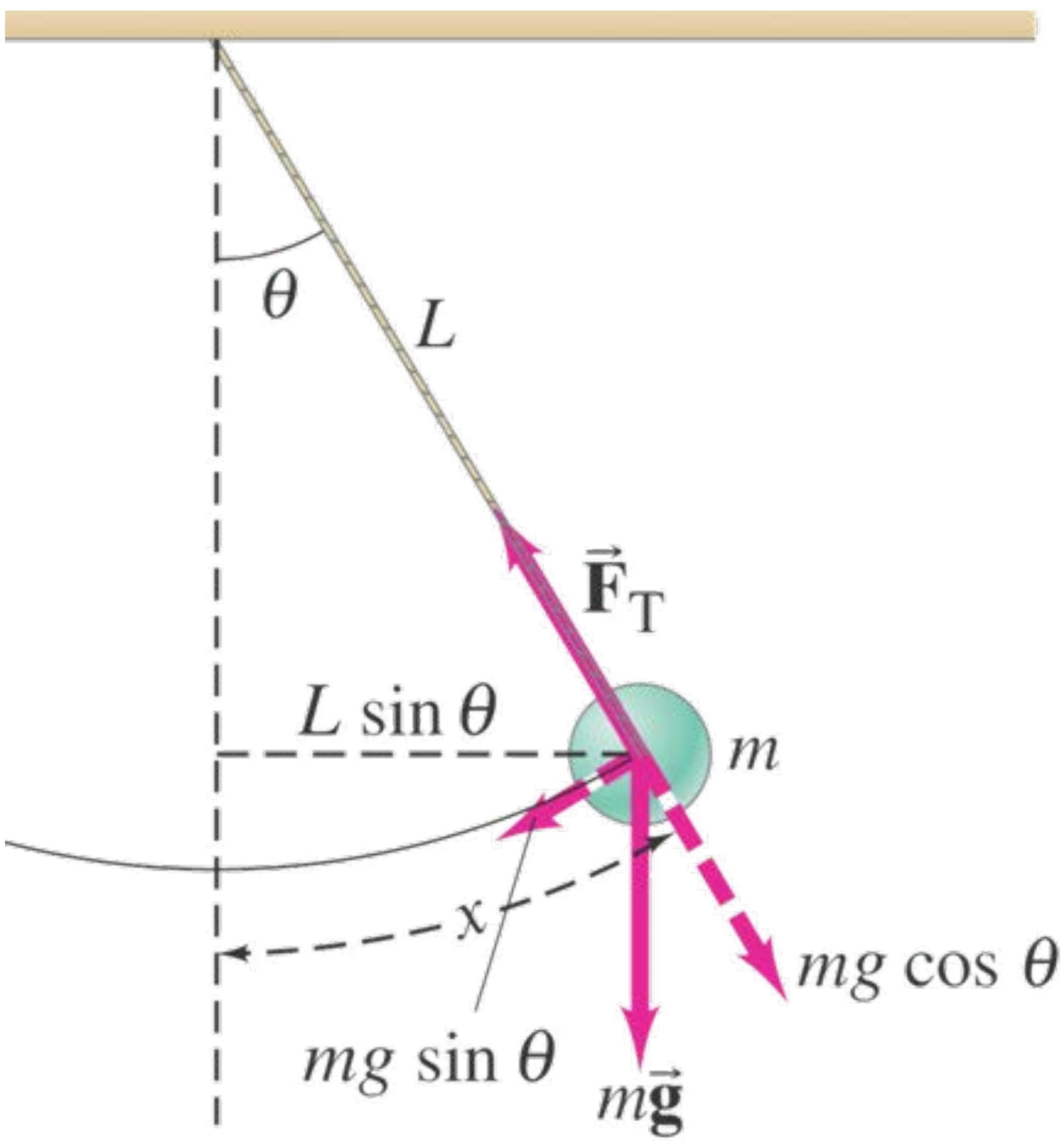


$$x(t) = (1.0\,\mathrm{cm})\cos(\omega t + \pi/2)$$

กล่องหมายเลข 1 มีมวล 4 kg ไถลเข้าหากล่องหมายเลข 2 ด้วยอัตราเร็วคงที่ 6.0 m/s ในทิศทางขนานกับความยาวของสปริง กล่องทั้งสองจะชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ที่เวลา 5 ms โดยหลังชนกล่องทั้งสองจะติดกันไป (ให้ถือว่าช่วงเวลาที่เกิดการชนน้อยกว่าคาบของการสั่นมาก ๆ) จงหา Amplitude ของการเคลื่อนที่แบบ SHM ภายหลังการชน

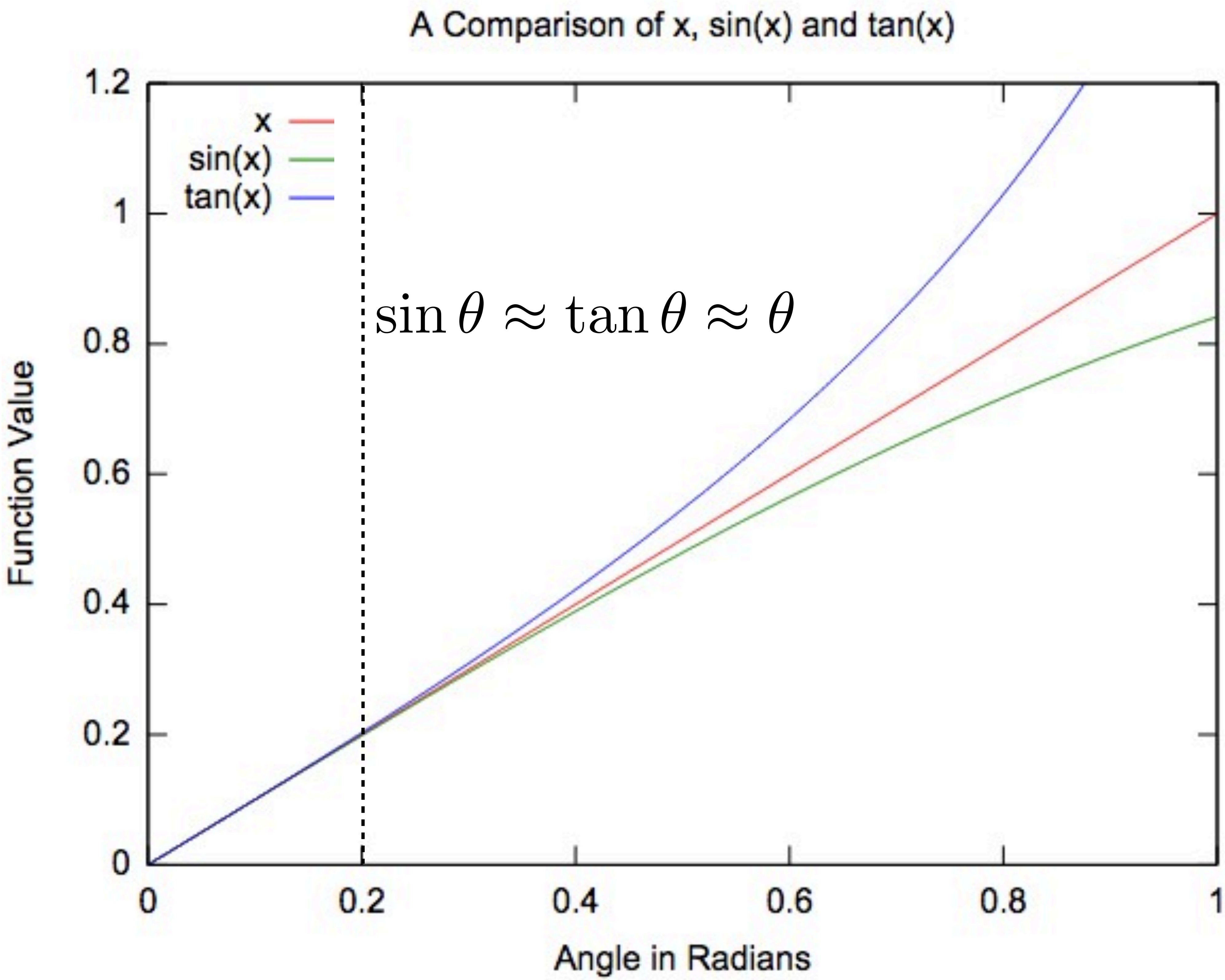
Simple pendulum

แบบจำลองในอุดมคติของก้อนมวลที่แขวนไว้กับเชือกไร้มวลที่ไม่ยืด



- แรงตึงเชือกเป็นแรงที่ทำให้มวลเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมเท่านั้น
- แรงคืนตัวเกิดจากแรงโน้มถ่วง
- ในกรณีทั่ว ๆ ไป การเคลื่อนที่แบบนี้ไม่ได้เป็น SHM
  - ➡ สำหรับ SHM แรงคืนตัวแปรผันตรงกับการกระจัดจากจุดสมดุล
  - ➡ ในกรณีนี้แรงคืนตัวแปรผันตามค่า $\sin\theta$

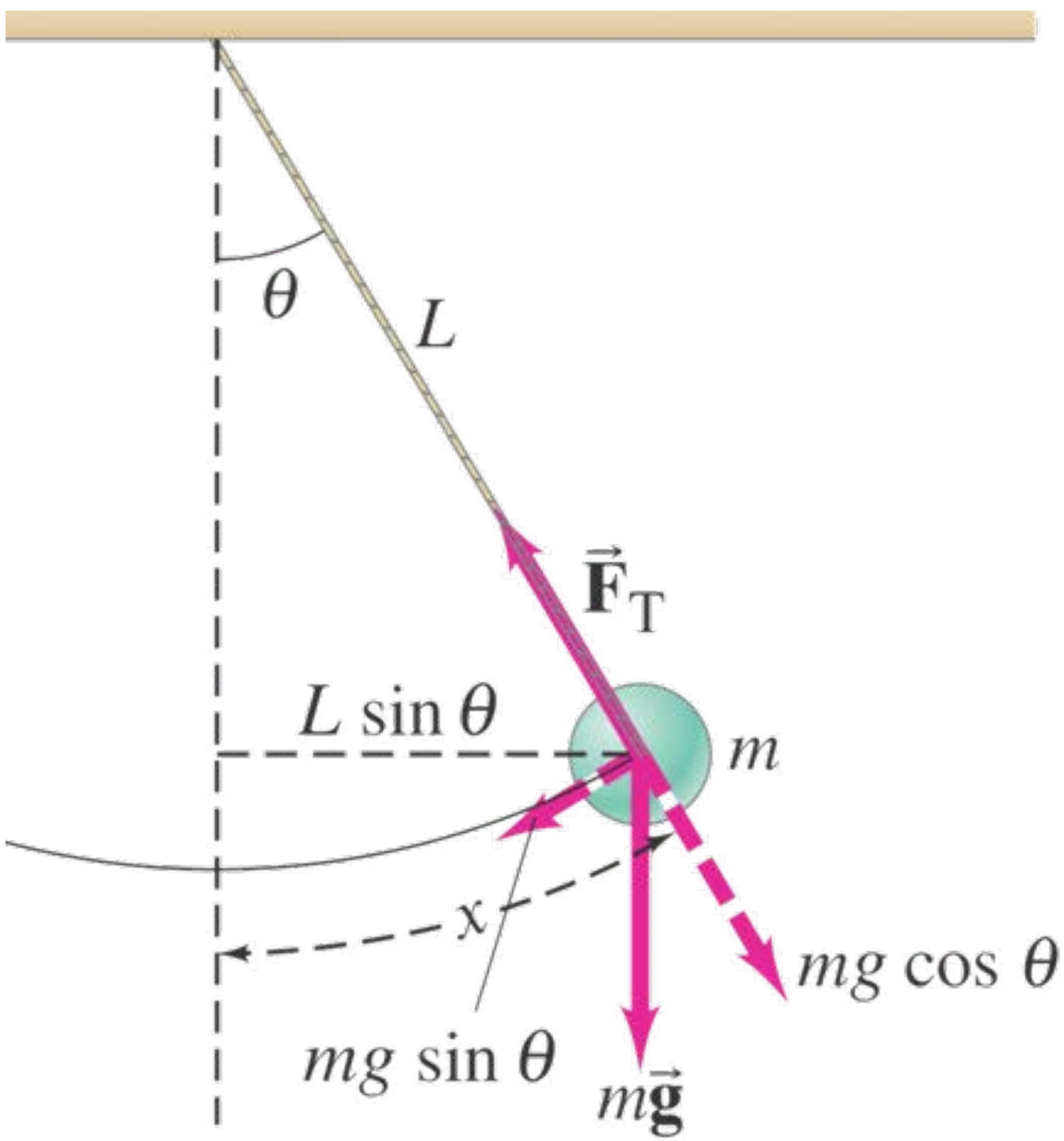
Small-angle approximation



http://en.wikipedia.org/wiki/Small-angle_approximation

Simple pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ ($x \approx L\theta$) การแกว่งจะเป็น SHM



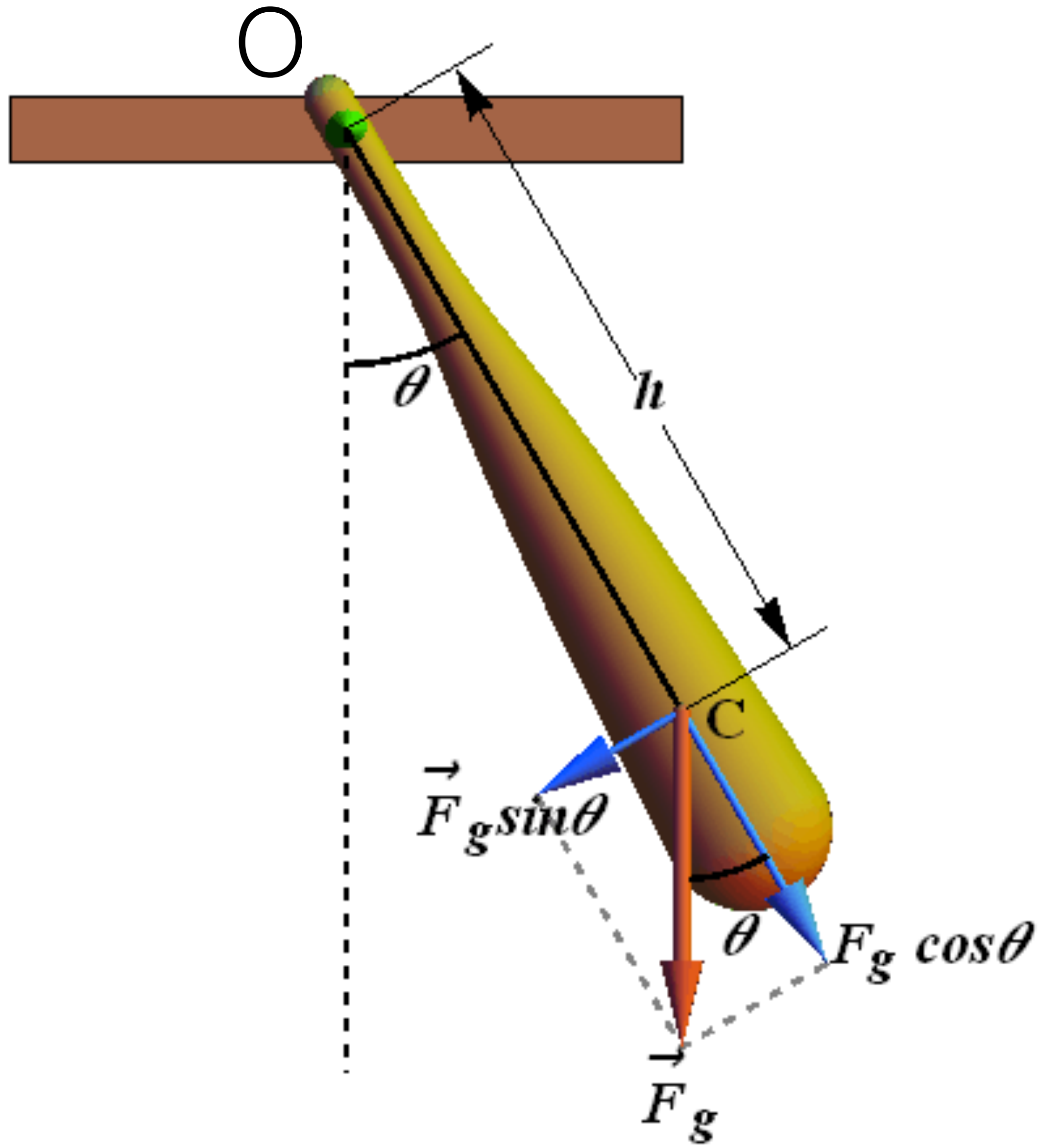
$$F = -mg\theta$$
$$= -\frac{mg}{L}x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x}$$ ← **SHM**

เป็น SHM ที่มี $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Physical pendulum

เป็นการแกว่งของวัตถุที่มีขนาดจำกัด โดยเราจะพิจารณาทอร์คคืนตัว โดยในรูปเป็นการแกว่งของไม้เบสบอลรอบแนวแกนที่พุ่งออกจากกระดาษ (แทนด้วยแกน Z) ผ่านจุด O โดยมี C เป็นจุดศูนย์กลางมวล



- h = ระยะจากจุดหมุน O ถึง C
- ทอร์กตามแนวแกน Z หาได้จาก

$$\tau_o = -(r \times F) = -(mg)(h\sin\theta)$$

แรงคืนตัว (Restoring force)

- ถ้าให้ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุเกร็ง จาก

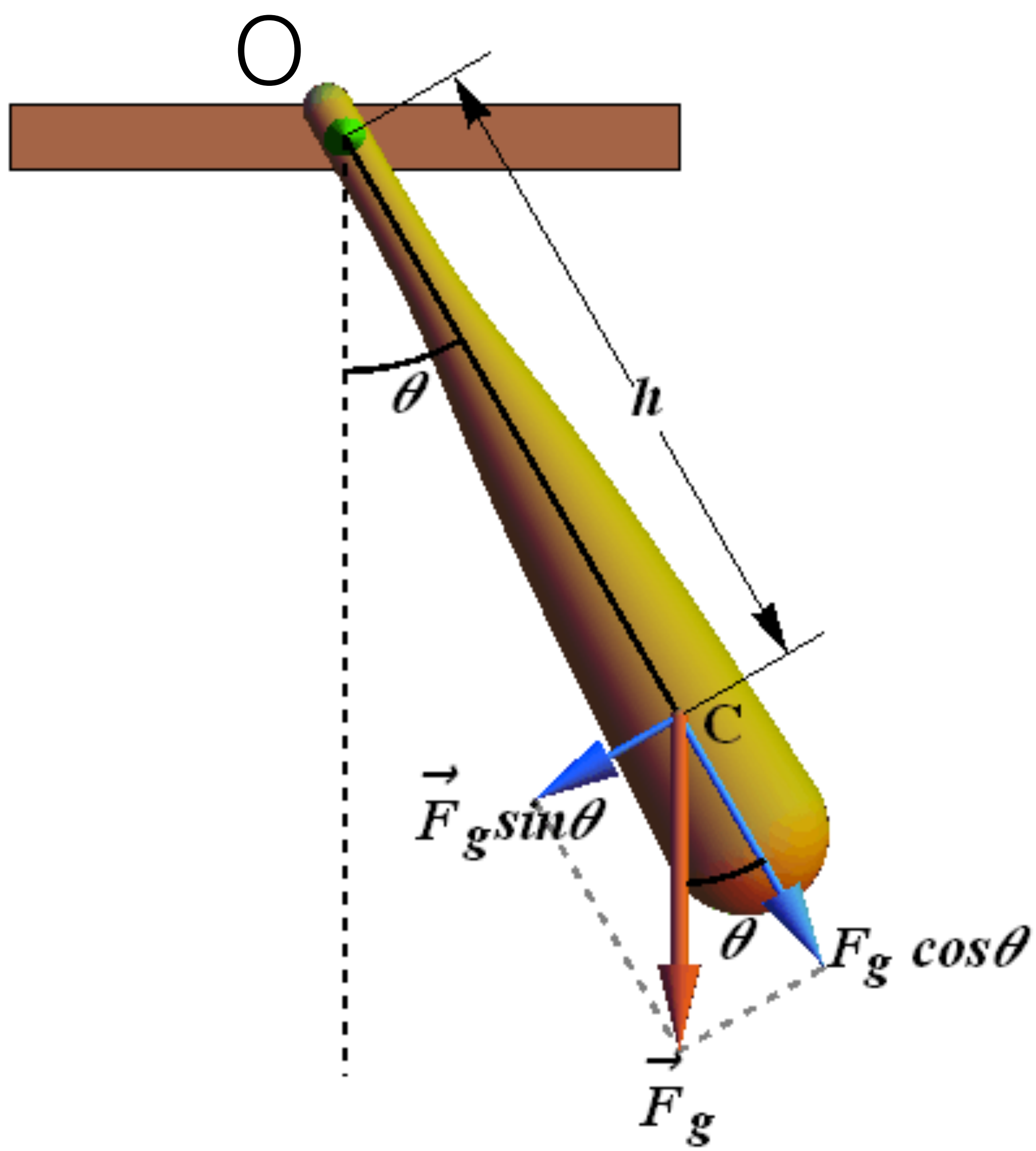
$$\tau_o = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0$$

http://www.rakeshkapoor.us/ClassNotes/HTMLFiles/Oscillations_98.gif

Physical pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$



$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0}$$ ← **SHM**

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

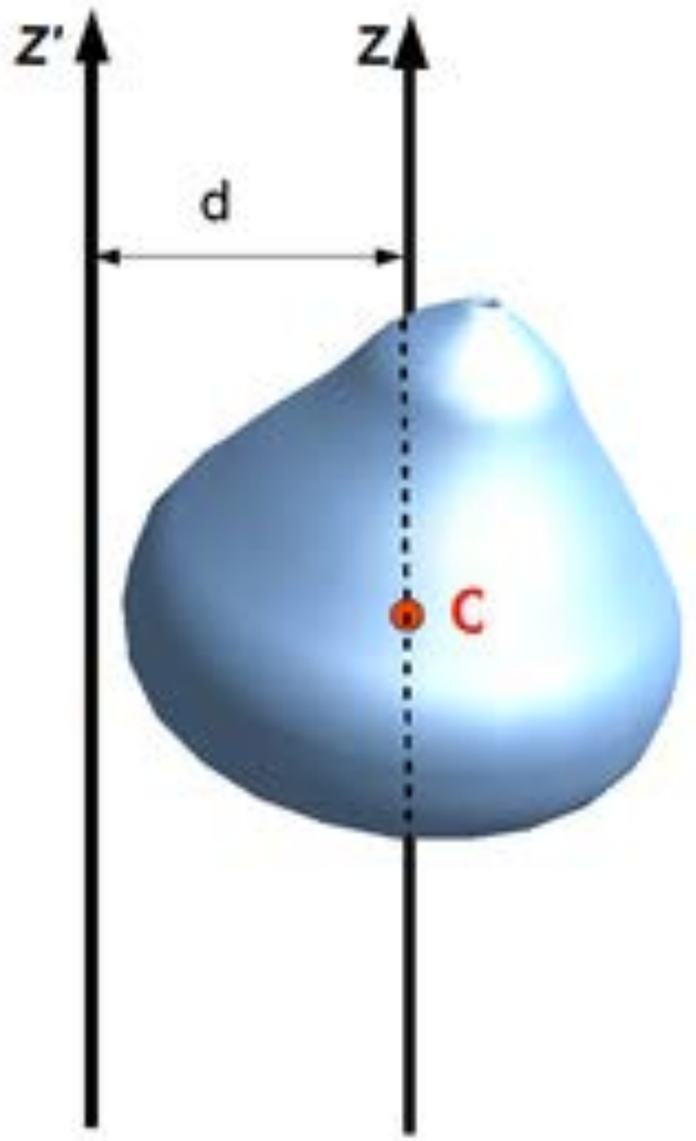
ความถี่เชิงมุม $\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$

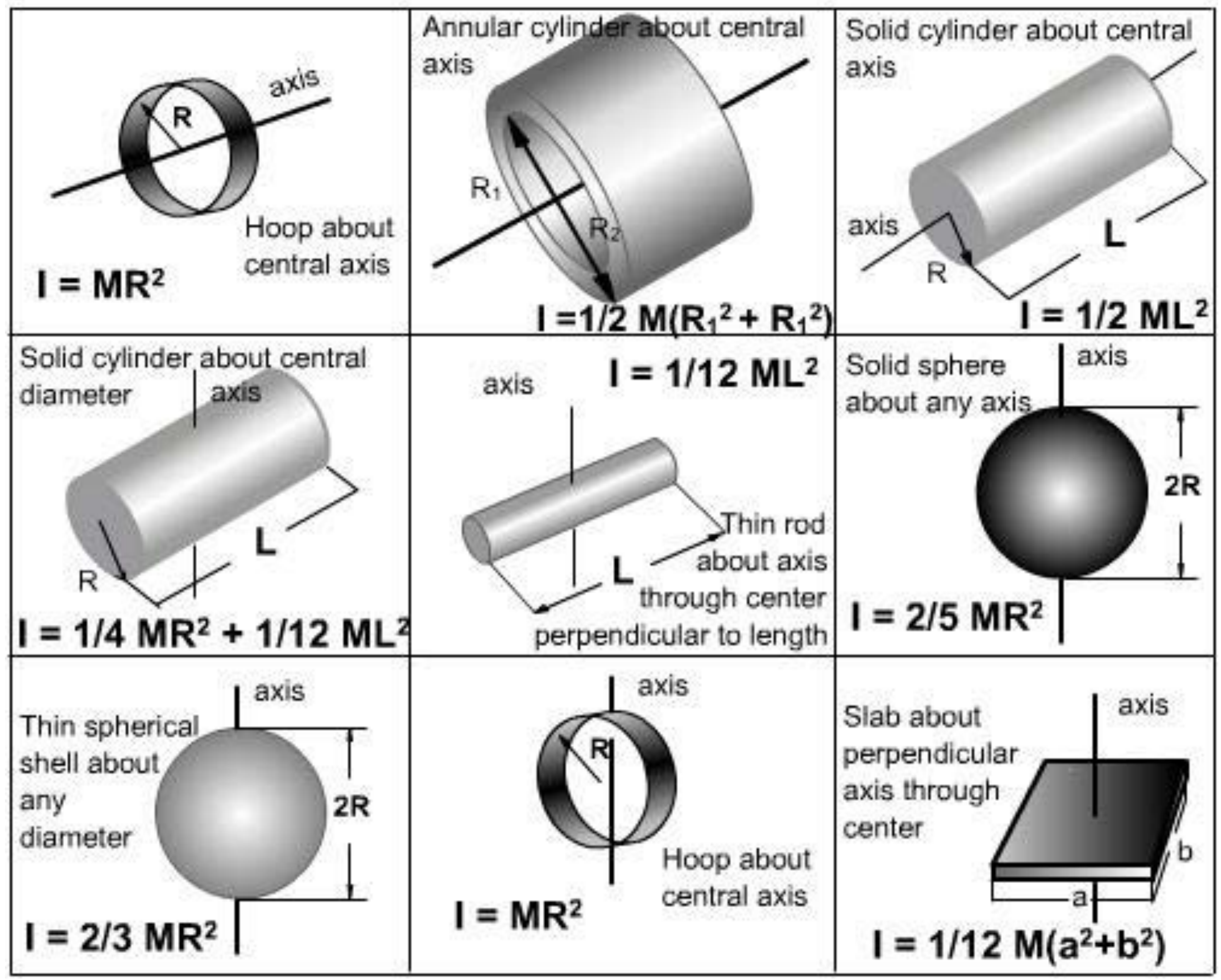
คาบ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$

ขึ้นอยู่กับมวลหรือไม่ (?)

Moment of inertia

Parallel axis theorem

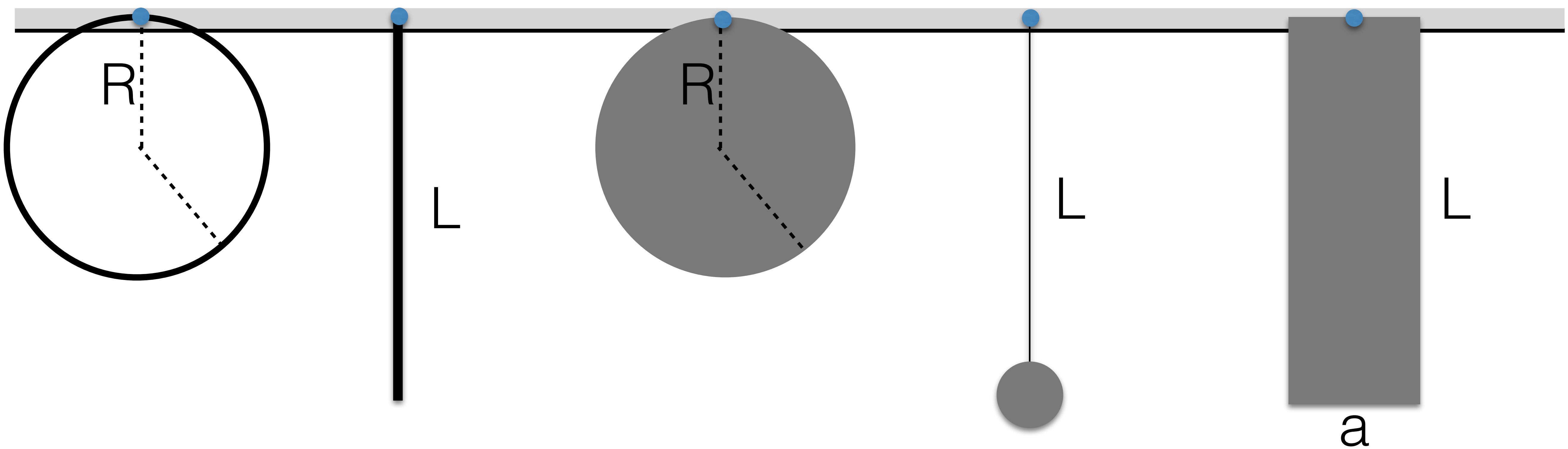




$$I_{z'} = I_{cm} + Md^2$$

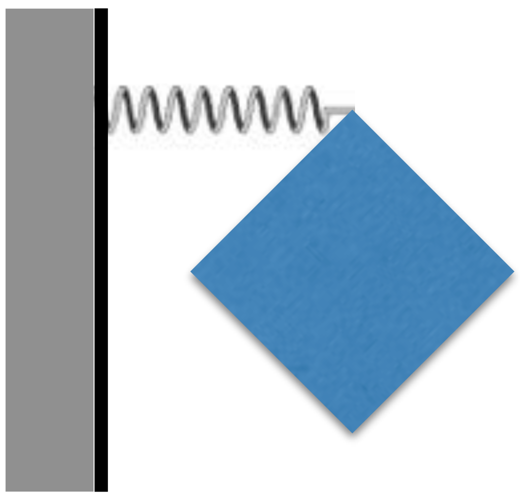
Example - 4

จงหาคาบของการแกว่งของระบบต่อไปนี้ และสรุปว่าคาบของการแกว่งขึ้นอยู่กับมวลหรือไม่ ให้การหมุนนี้อยู่ในแนวกระดาษ แกนของการหมุนคือทิศที่พุ่งออกจากกระดาษ



เปรียบเทียบขนาดของวัตถุ ถ้าต้องการให้วัตถุทุกชิ้นมีคาบเท่ากัน

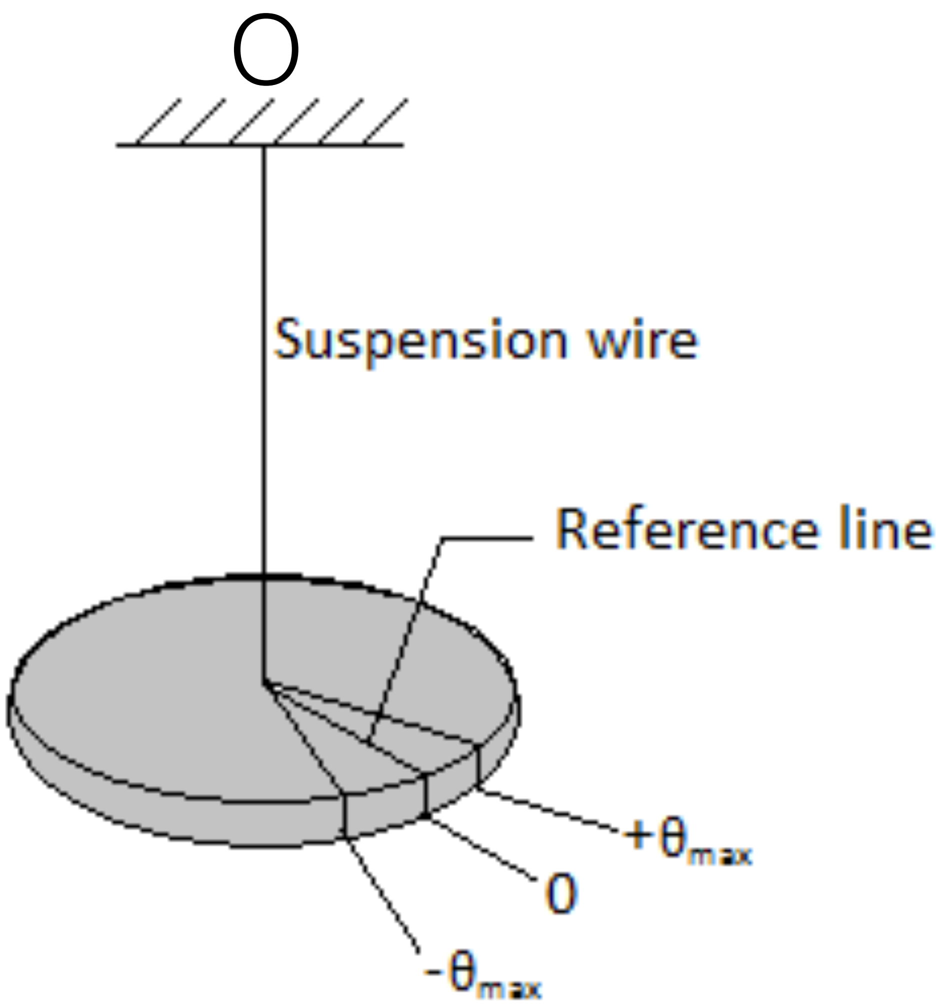
Example - 5



กล่องลูกบาศก์มวล 3.0 kg แต่ละด้านยาวด้านละ 6 cm โดยติดอยู่กับแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของมัน ดังรูป ที่มุมด้านบนของกล่องมีสปริง ที่มีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 1200 N/m เชื่อมอยู่โดยยึดติดกับผนัง ในตอนแรกสปริงไม่มีการยืดหรือกดตัว ถ้าเราหมุนกล้องเป็นมุม 3 องศา แล้วปล่อยให้แกว่งแบบ SHM จงคำนวณหาคาบของการแกว่ง

Torsion pendulum

พิจารณาจานหมุน



Torsion constant

$$\tau_o = -\kappa\theta = I\alpha$$

$$= -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

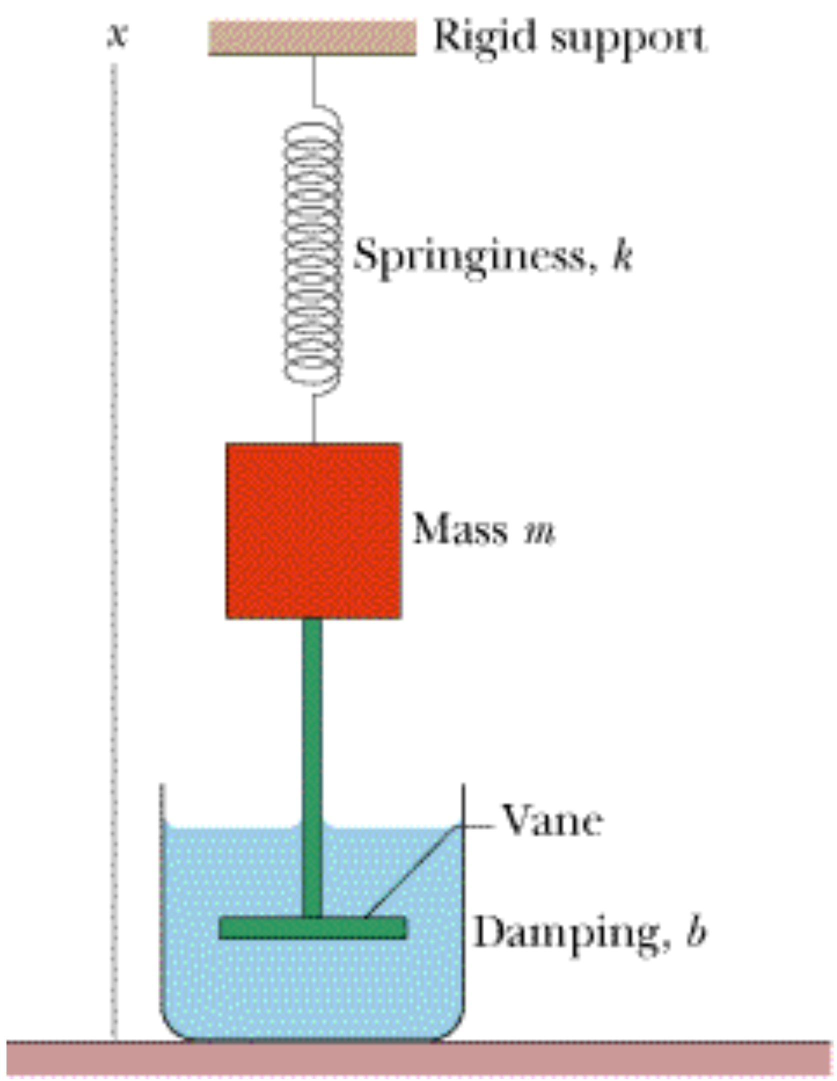
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta = 0}$$ ← **SHM**

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

Damped oscillations

พิจารณา ในสถานการณ์ที่สมจริงมากยิ่งขึ้น โดยมีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน หรือแรงต้านอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง การแกว่งที่เกิดขึ้นจะถูกหน่วง



http://www.webassign.net/hrw/hrw7_15-15.gif

พิจารณาเฉพาะแนวแกน x ตามรูป

Damping force

$$F_d = -b\nu \qquad F_s = -kx$$

Damping constant

แรงที่กระทำต่อมวล m (พิจารณาว่าผลของแรงโน้มมีน้อยมากเมื่อเทียบกับ F_d และ F_s)

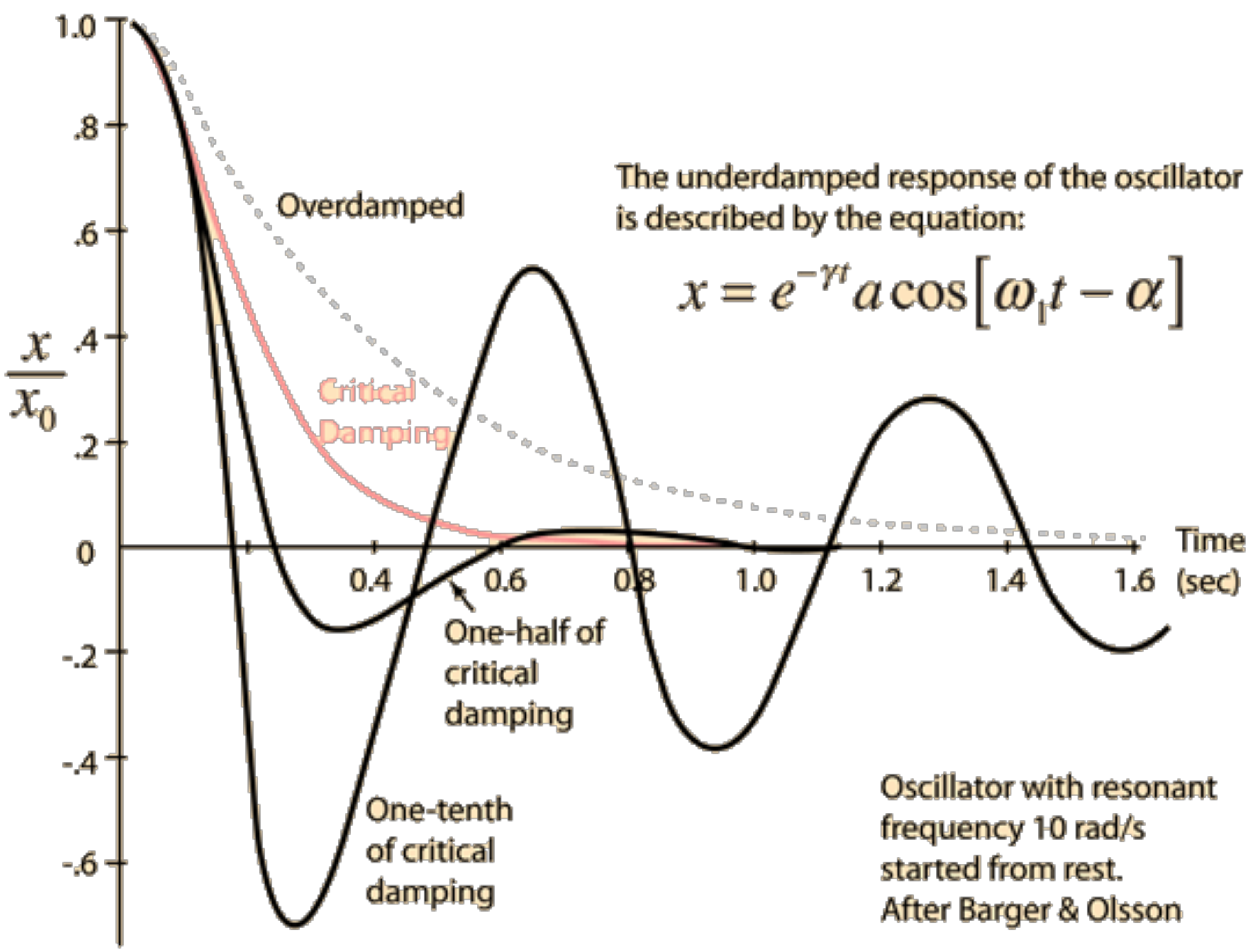
$$-b\nu - kx = ma$$

ค่าคงที่ของความหน่วง $\gamma = b/2m$

Damped oscillations

ถ้าเราพิจารณาสมการ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$

ใช้คำตอบที่อยู่ในรูป $x(t) = e^{\lambda t}$ จะได้ว่า $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$



http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/oscda.html#c1

Overdamped

$$b^2 - 4mk > 0$$

กลับสู่สมดุลโดยไม่แกว่ง

Critical damping

$$b^2 - 4mk = 0$$

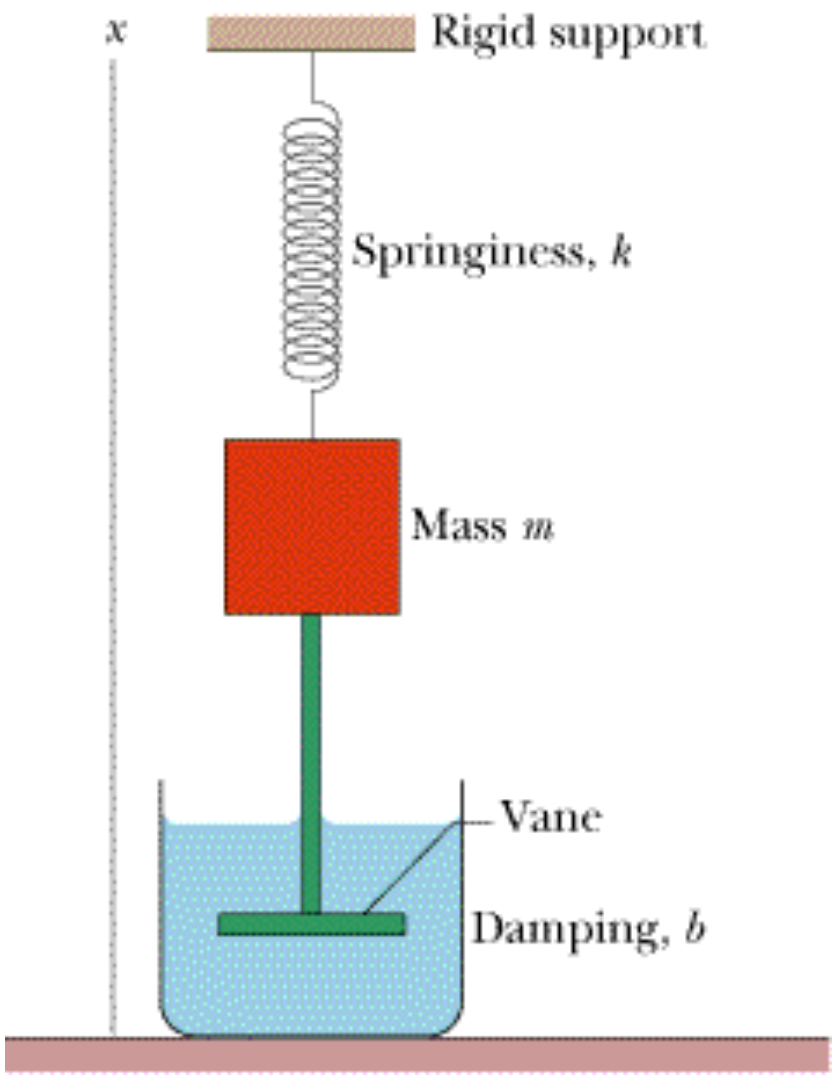
กลับสู่สมดุลเร็วที่สุดโดยไม่แกว่ง

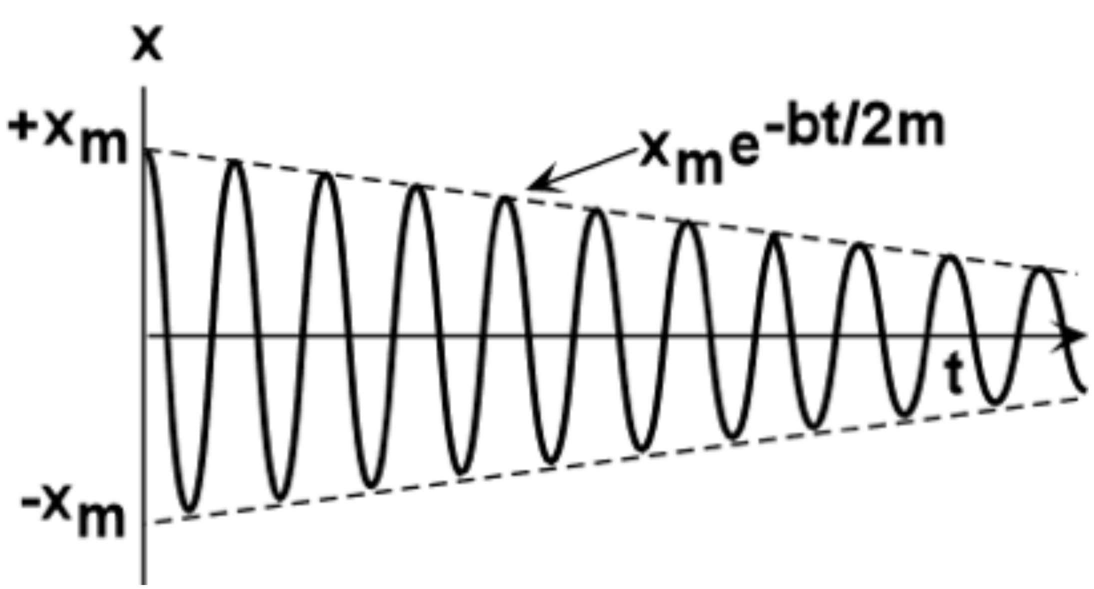
Underdumped

$$b^2 - 4mk < 0$$

เกิดการแกว่งโดย Amplitude ค่อย ๆ ลดลง

Underdamped oscillations





$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

คำตอบของสมการจะได้ว่า

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

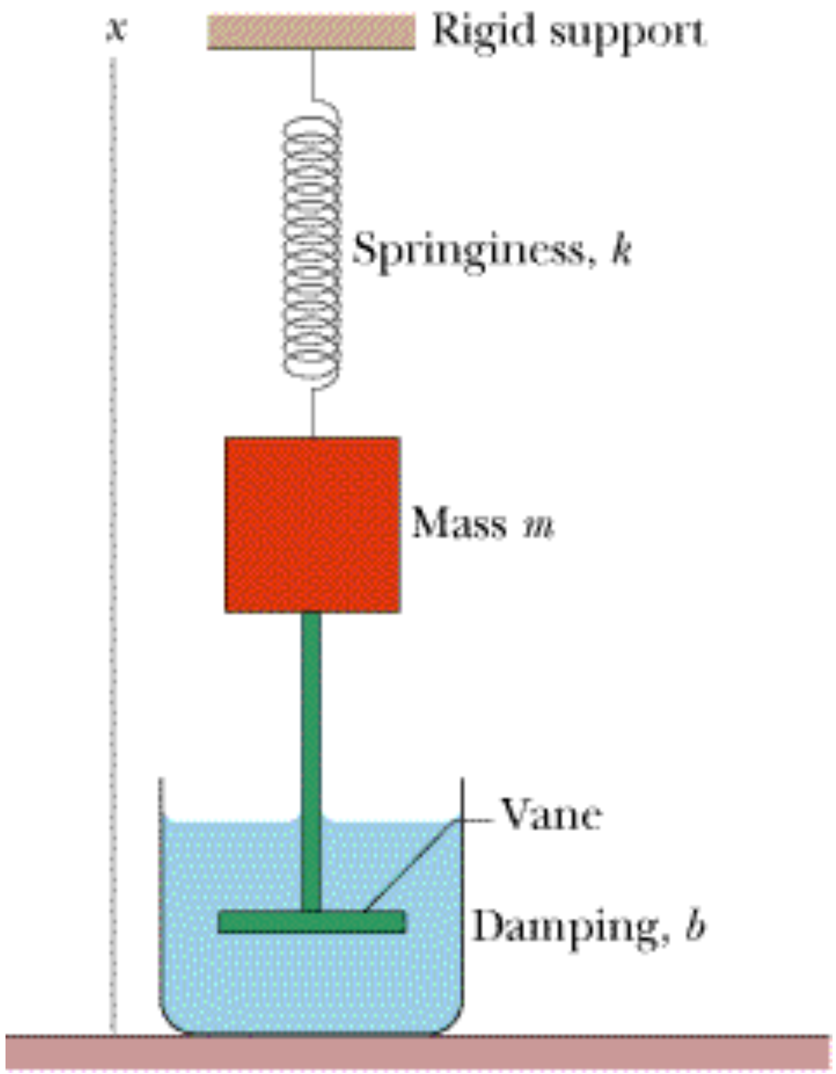
และค่าความถี่เชิงมุมมีค่าเป็น

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

มีจุดที่น่าสังเกต 2 อย่างคือ

- Amplitude มีค่าลดลงตามเวลา
- Angular frequency มีค่าลดลง ส่งผลให้คาบมีค่าเพิ่มมากขึ้น (แรงต้านทำให้วัตถุเคลื่อนที่ช้าลง)

Example - 6



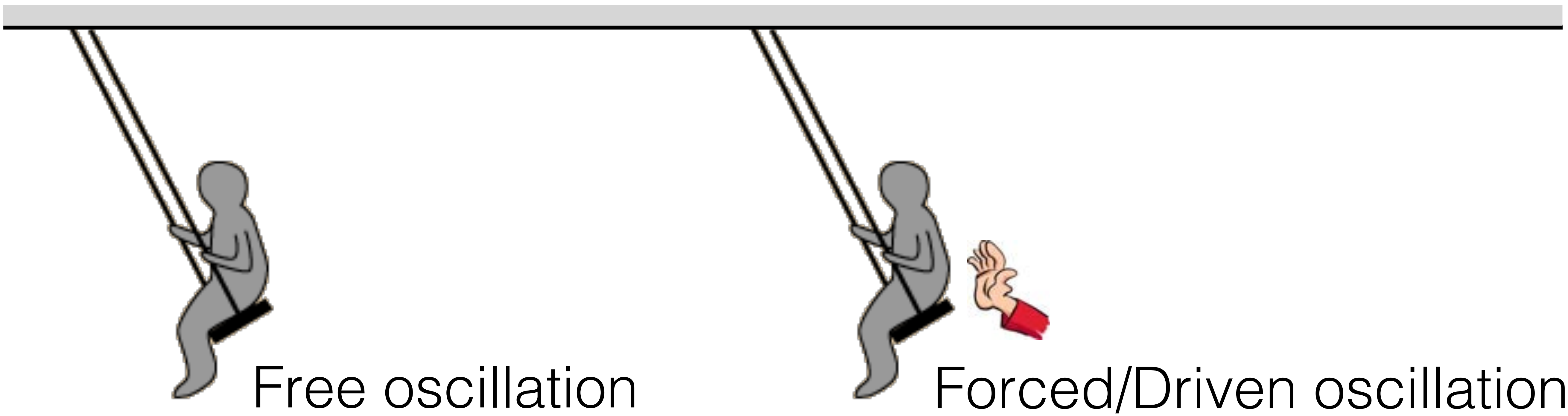
พิจารณาจากระบบตามรูป ให้ m = 250 g, k = 85 N/m, และ b = 70 g/s จงคำนวณหา

(ก) คาบของการเคลื่อนที่

(ข) ระยะเวลาเท่าใดที่ค่า Amplitude ของการเคลื่อนที่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น

(ค) ระยะเวลาเท่าใดที่พลังงานกลของระบบลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น

Forced oscillations and resonance

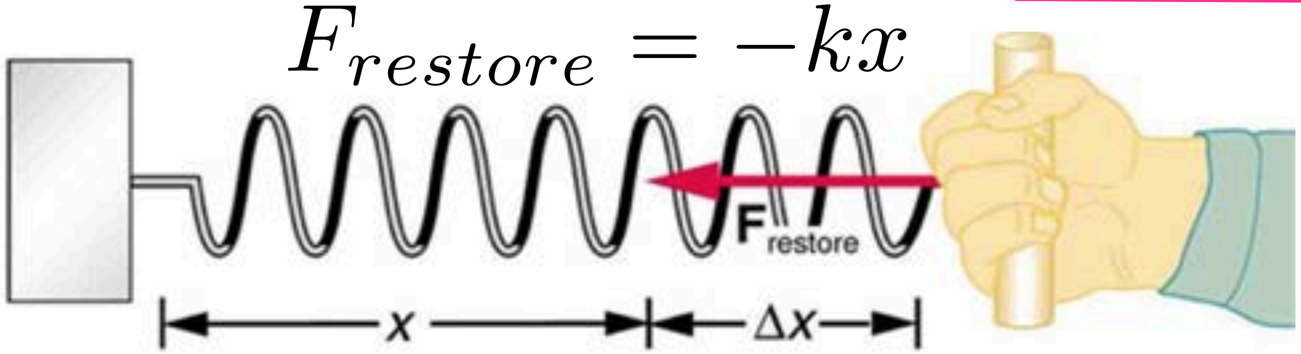


ในกรณีของ Forced oscillation นั้นเรามีความถี่เชิงมุมที่เกี่ยวข้องกับระบบอยู่สองค่าคือ

- ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural angular frequency, ω_0) บอกถึงค่าความถี่เชิงมุมของระบบที่ถูกทำให้แกว่งจากการกระทำเพียงขณะหนึ่ง จากนั้นปล่อยให้แกว่งโดยอิสระ (สิ่งที่เรียนมาก่อนหน้า)
- Angular frequency ที่เกิดจากแรงขับ (Driving force), ω_d

Forced oscillations and resonance

$$F_{restore} = -kx$$



$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$ma = -kx + F_0 \cos \omega_d t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_d t$$

เมื่อเวลาผ่านไปนานพอสมควร ระบบจะสั่นด้วยความถี่ที่เราใส่เข้าไป

$$x = A \cos \omega_d t$$

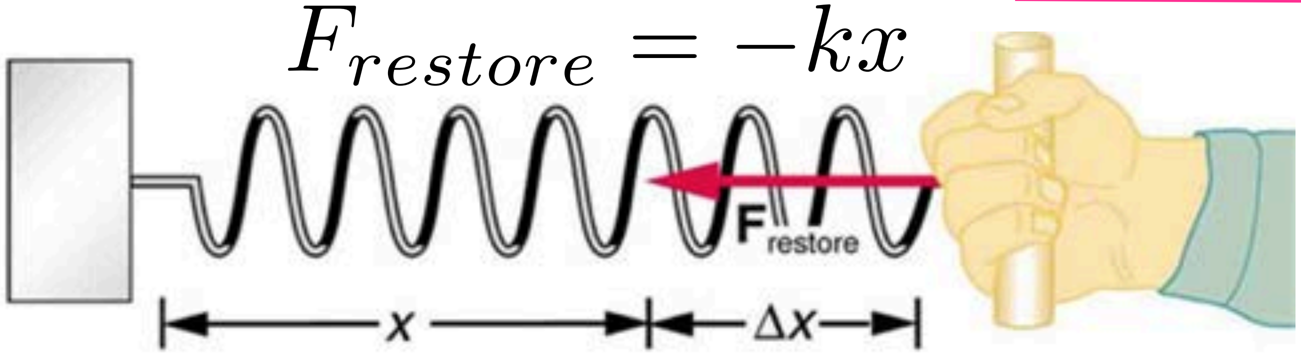
$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_d \sin \omega_d t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_d^2 \cos \omega_d t$$

http://philschatz.com/physics-book/resources/Figure_04_01_02.jpg

Forced oscillations and resonance

$$F_{restore} = -kx$$



$$\longrightarrow F_0 \cos \omega_d t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$

$$-A\omega_d^2 \cos\omega_d t + \frac{kA}{m}\cos\omega_d t = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$

$$A\left(\frac{k}{m} - \omega_d^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_d^2} \longrightarrow$$

$$\omega_0 \gg \omega_d;\ A = F_0/k$$

$$\omega_0 \ll \omega_d;\ A \to 0$$

$$\omega_0 = \omega_d;\ A \to \infty$$

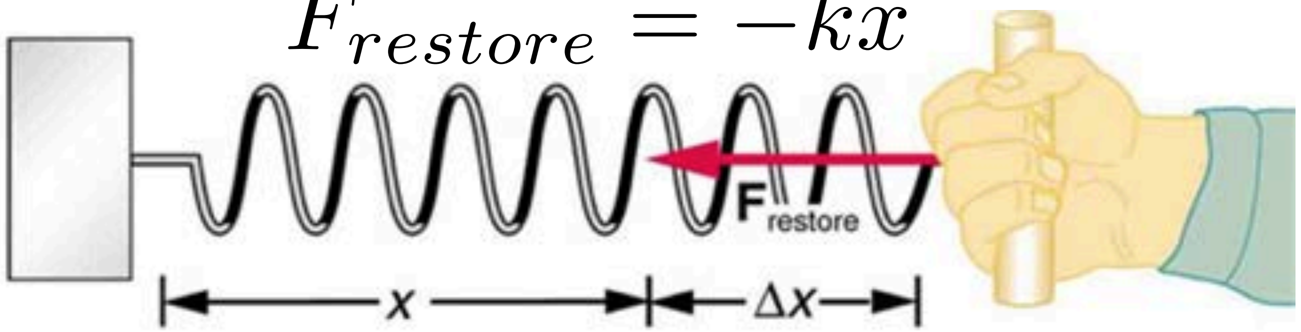
Resonance (การสั่นพ้อง)

Forced oscillations and resonance

พิจารณาแรงต้านอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง

$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$F_{restore} = -kx$$



$$F_{air} = -b\nu$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_d t$$

คำตอบของสมการนี้ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

- Transient solution
- Steady solution

Forced oscillations and resonance

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$

Transient solution

Steady solution

$$x(t) = A_h e^{-bt/2m}\sin(\omega' t + \phi_h) + A\cos(\omega' t + \phi)$$

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}$$

Resonance จะเกิดเมื่อ A มีค่ามากที่สุด

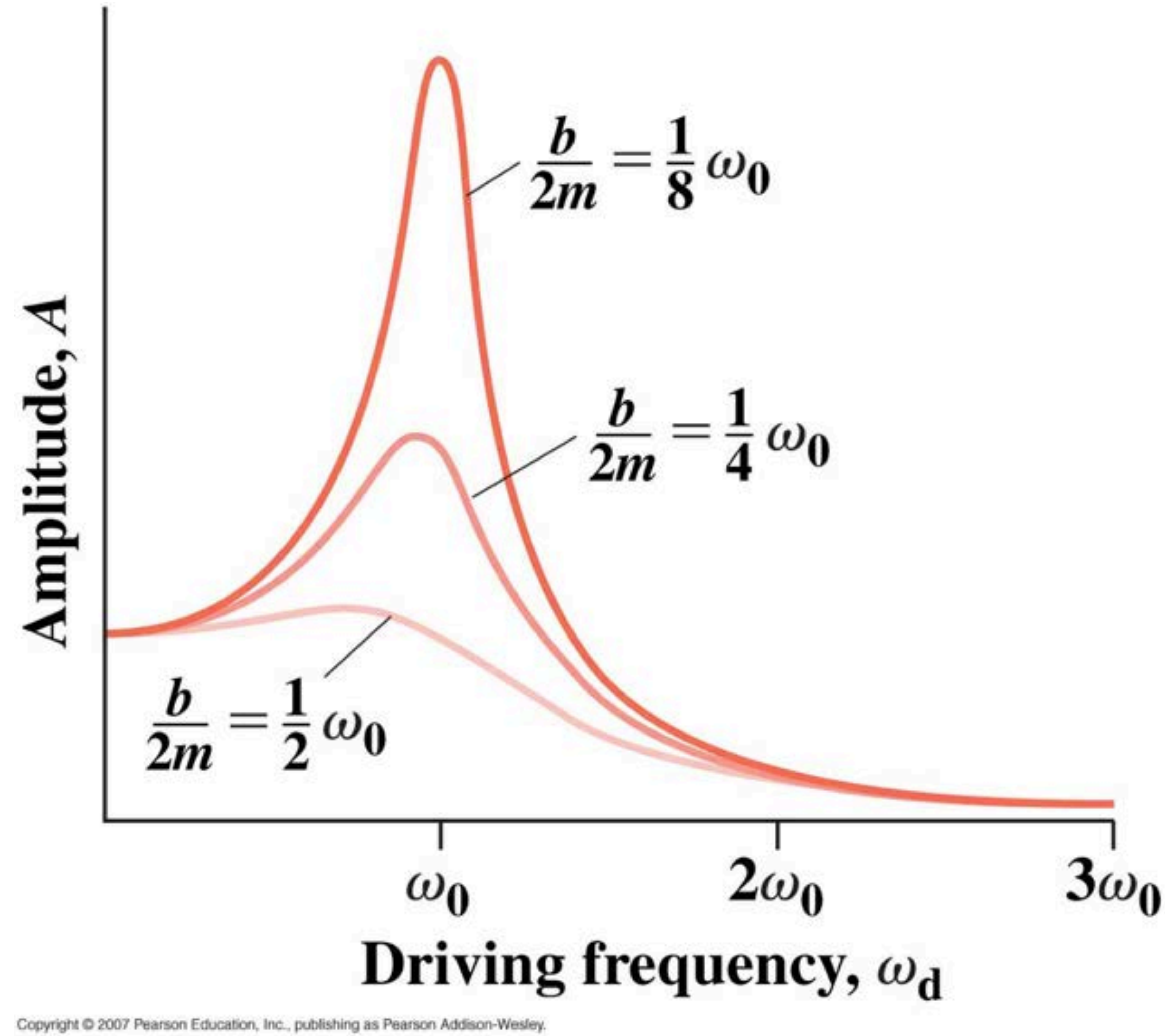
$$\frac{d}{d\omega_d}\left(\frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}\right) = 0$$

ได้ว่า $\omega_d = 0$ หรือ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$

ไม่ใช่สิ่งที่เราสนใจ

Forced oscillations and resonance

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$



http://www.physics.louisville.edu/cldavis/phys298/notes/resonance_fig2.jpg

Example - 7

Summary