# Simple harmonic motion

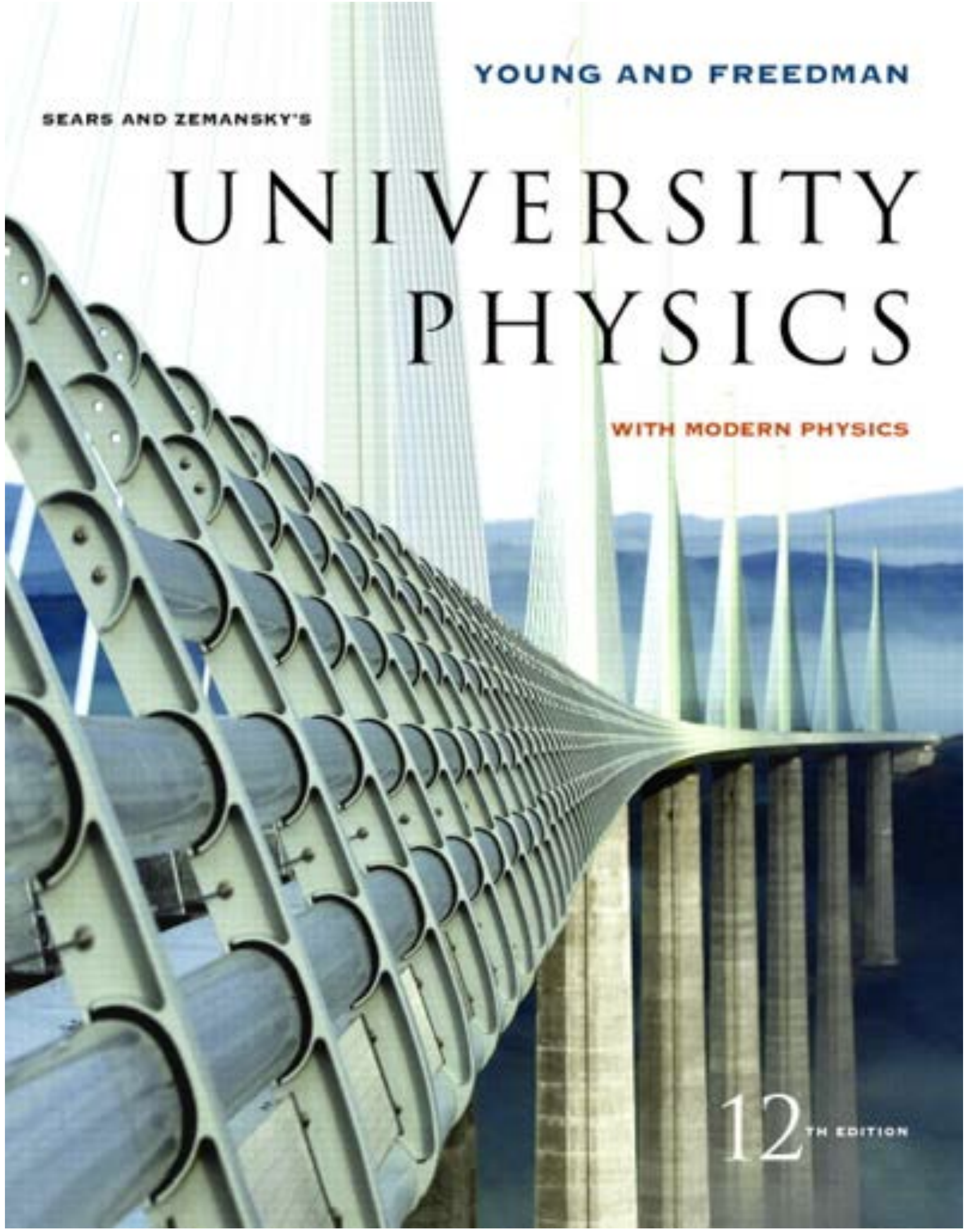
N. Srimanobhas
Norraphat.Srimanobhas@mail.cern.ch

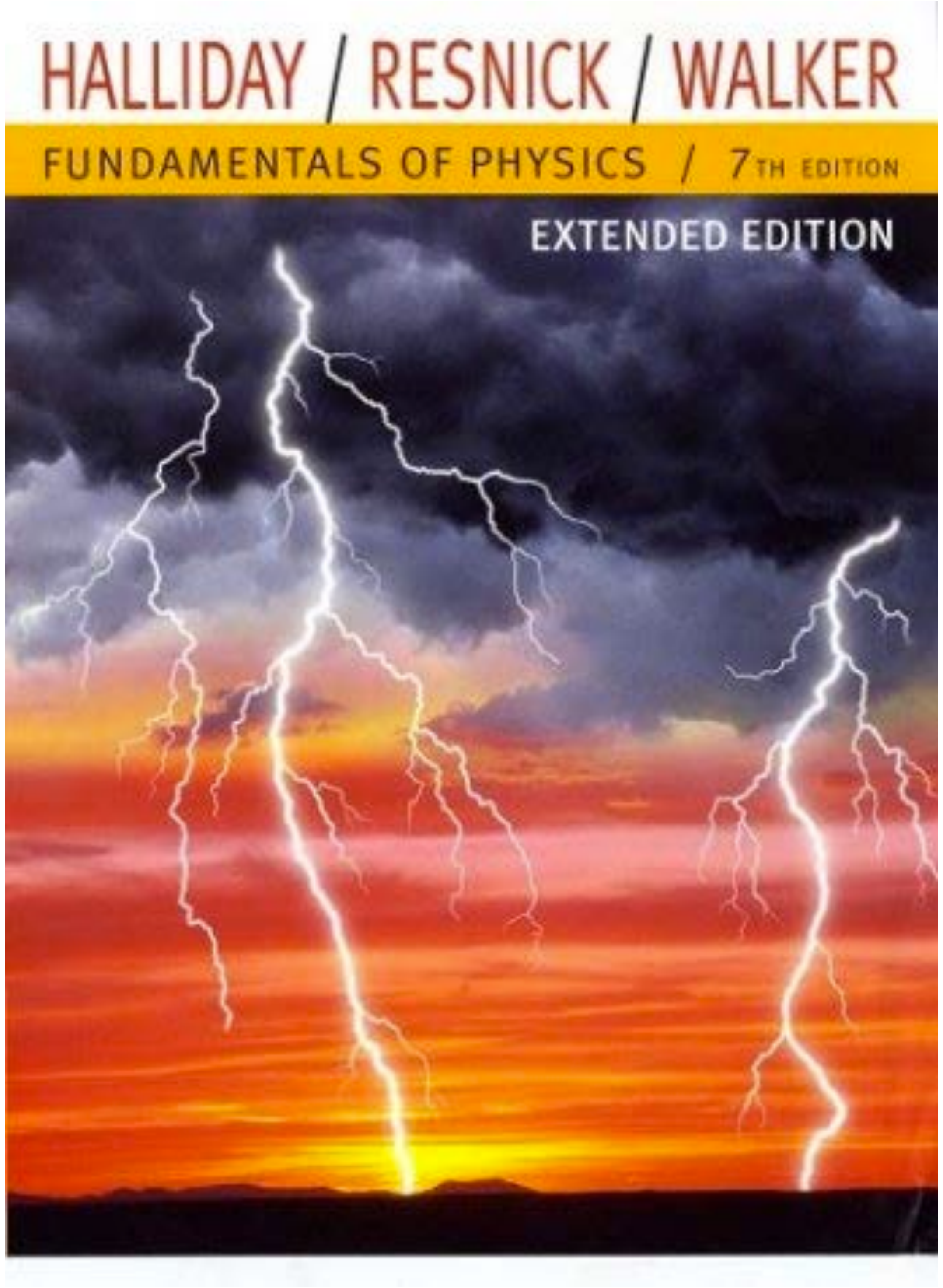
https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/Main/PhatSrimanobhasTeachingCU

# Contents

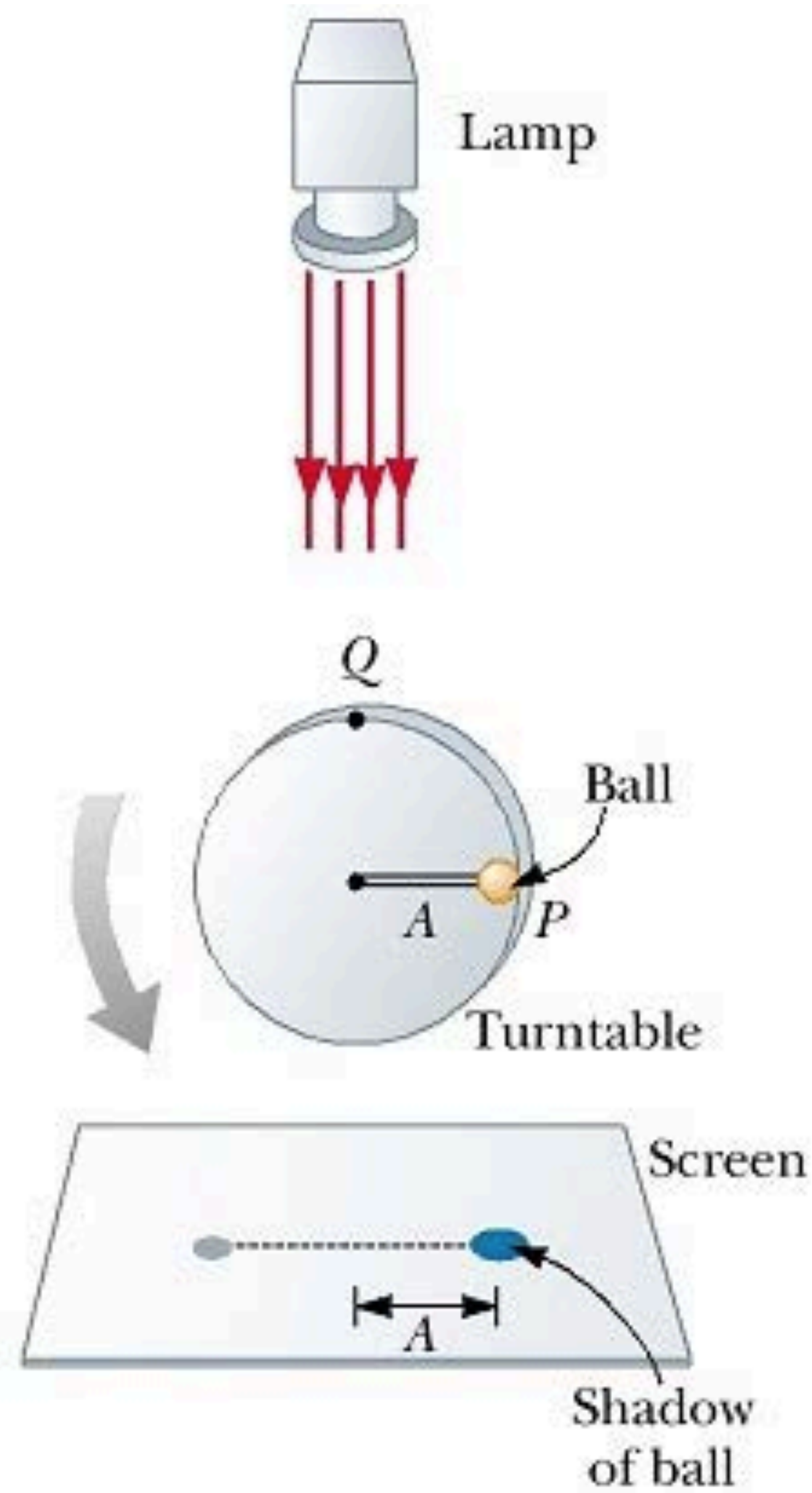
- **Simple harmonic motion**
  - Uniform circular motion
  - Simple harmonic motion
    - Energy
  - Simple pendulum
    - Small-angle approximation
  - Physical pendulum
  - Torsion pendulum
  - Damped oscillations
  - Forced oscillations and resonance
  - Summary

# References

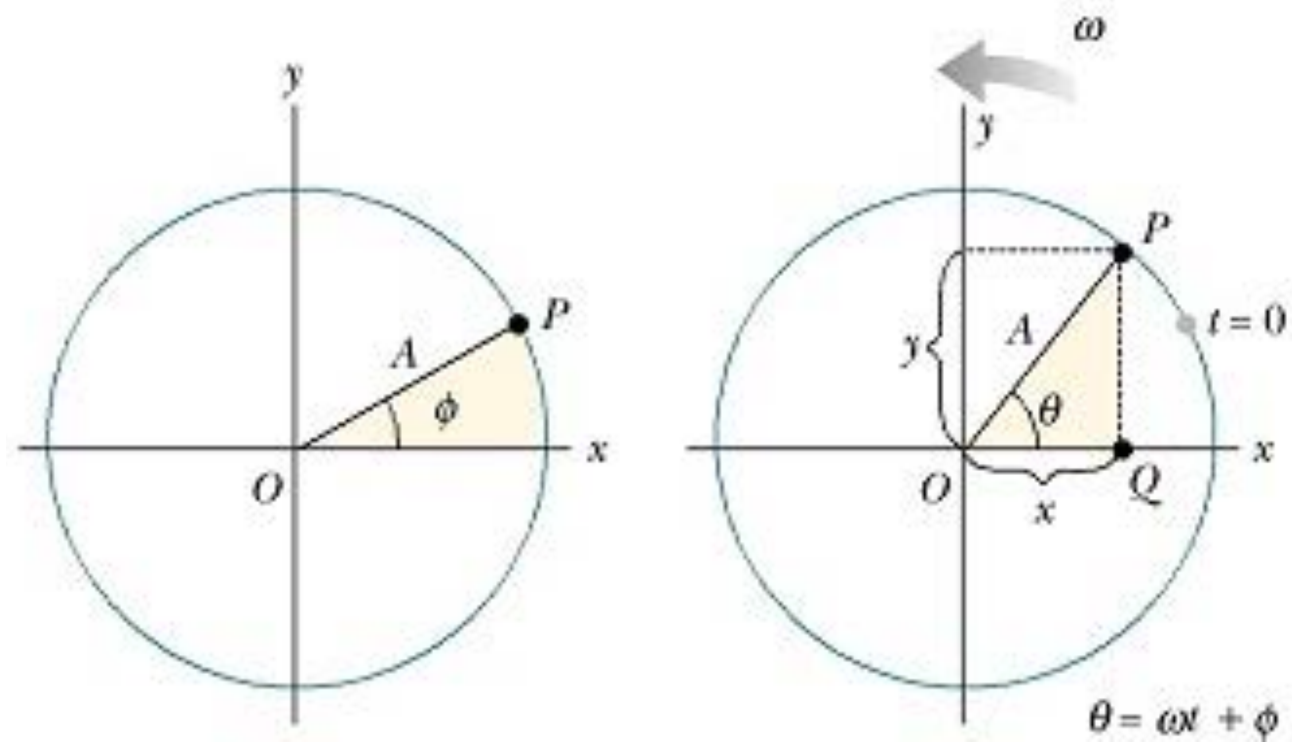

YOUNG AND FREEDMAN
SEARS AND ZEMANSKY'S
UNIVERSITY PHYSICS
WITH MODERN PHYSICS
12TH EDITION


HALLIDAY / RESNICK / WALKER
FUNDAMENTALS OF PHYSICS / 7TH EDITION
EXTENDED EDITION

# Uniform circular motion




Angular velocity
(ใน circular motion)




$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

เราสามารถเลือกใช้ Sine หรือ Cosine ก็ได้

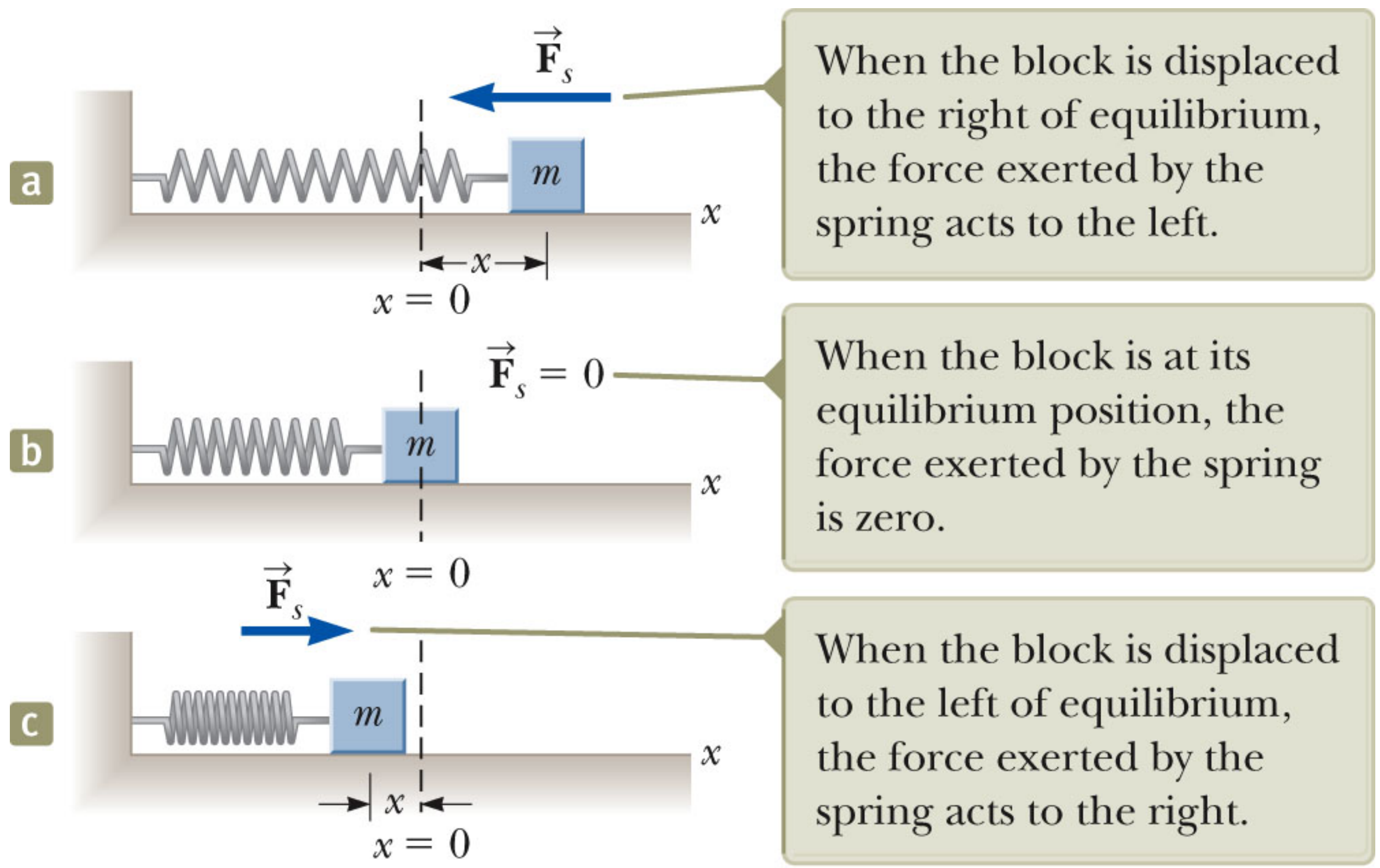
$$T = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T}$$

คาบ (Period) ความถี่ (Frequency)

# Simple harmonic motion

การเคลื่อนที่แบบ SHM เป็นรูปแบบหนึ่งของ periodic motion โดยมีเงื่อนไขคือ

- แรง (แรงคืนตัว) แปรผันตรงกับการกระจัดจากจุดสมดุล
- แรงมีทิศทางเข้าหาจุดสมดุล (equilibrium position) เสมอ
- แรงมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับการกระจัดเสมอ




$$F = -kx$$ ← กฎของฮุค

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}\,;\ \omega^2 = \frac{k}{m}$$

SHM

Angular <u>frequency</u>

# Simple harmonic motion

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)\,;\omega = \sqrt{k/m}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

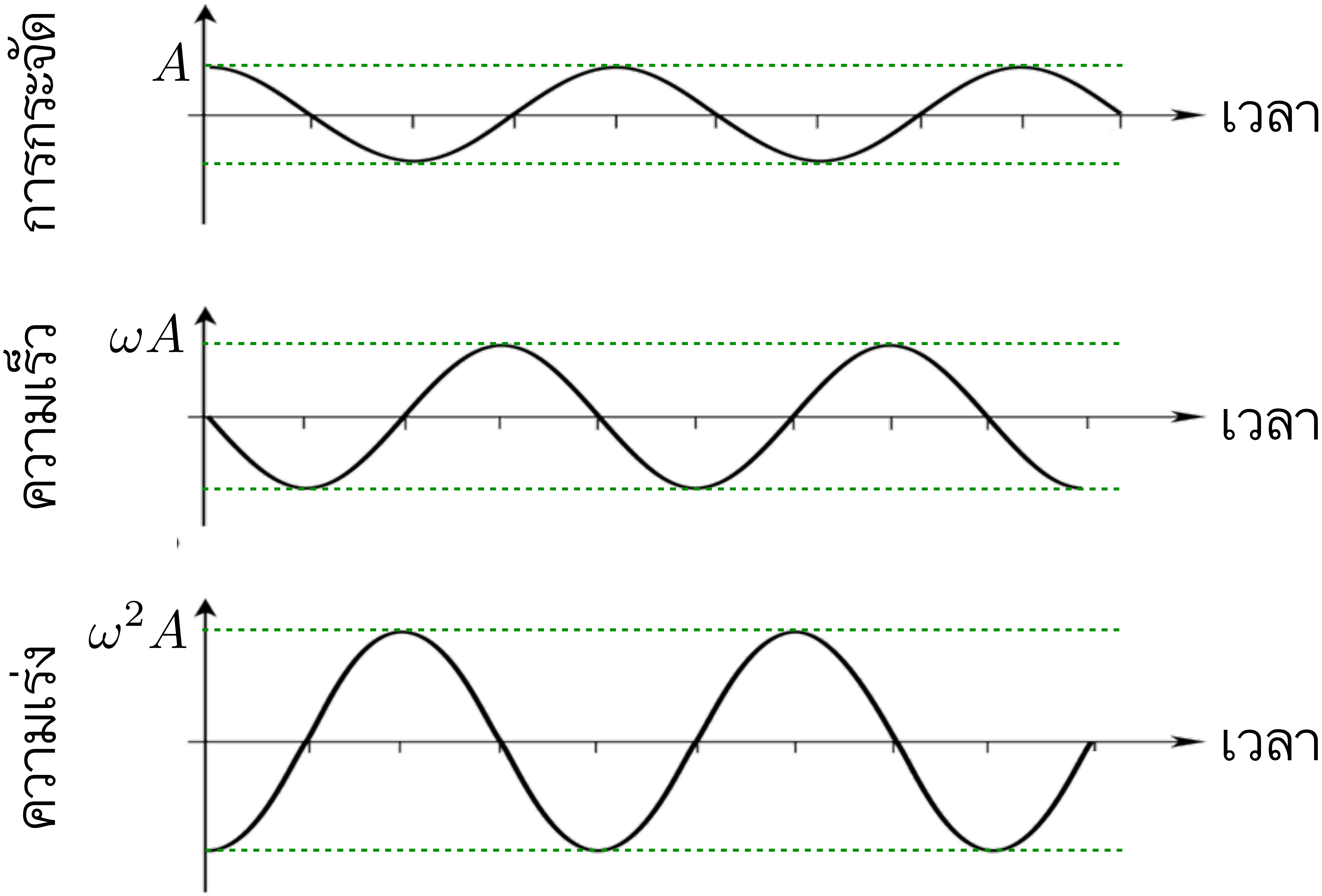
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

**ย้อนกลับไปเป็นสมการ SHM นั่นเอง**

ฟังก์ชั่น sine กับ cosine นั่นมีค่าอยู่ระหว่าง [-1,1] หมายความว่า

- วัตถุเคลื่อนที่อยู่ระหว่าง [-A,A]
- อัตราเร็วสูงสุดอยู่ที่ $\omega A$
- อัตราเร่งอยู่ที่ $\omega^2 A$
- จงบอกตำแหน่งที่วัตถุมี (1) อัตราเร็วสูงสุด และ (2) อัตราเร่งสูงสุด

# Simple harmonic motion



# Simple harmonic motion

เราสามารถหา

- อัตราเร็ว ในรูปแบบของการกระจัด

$$\begin{aligned} v^2(t) &= \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \\ &= \omega^2 A^2 (1 - \cos^2(\omega t + \phi)) \\ &= \omega^2 (A^2 - x^2(t)) \end{aligned}$$

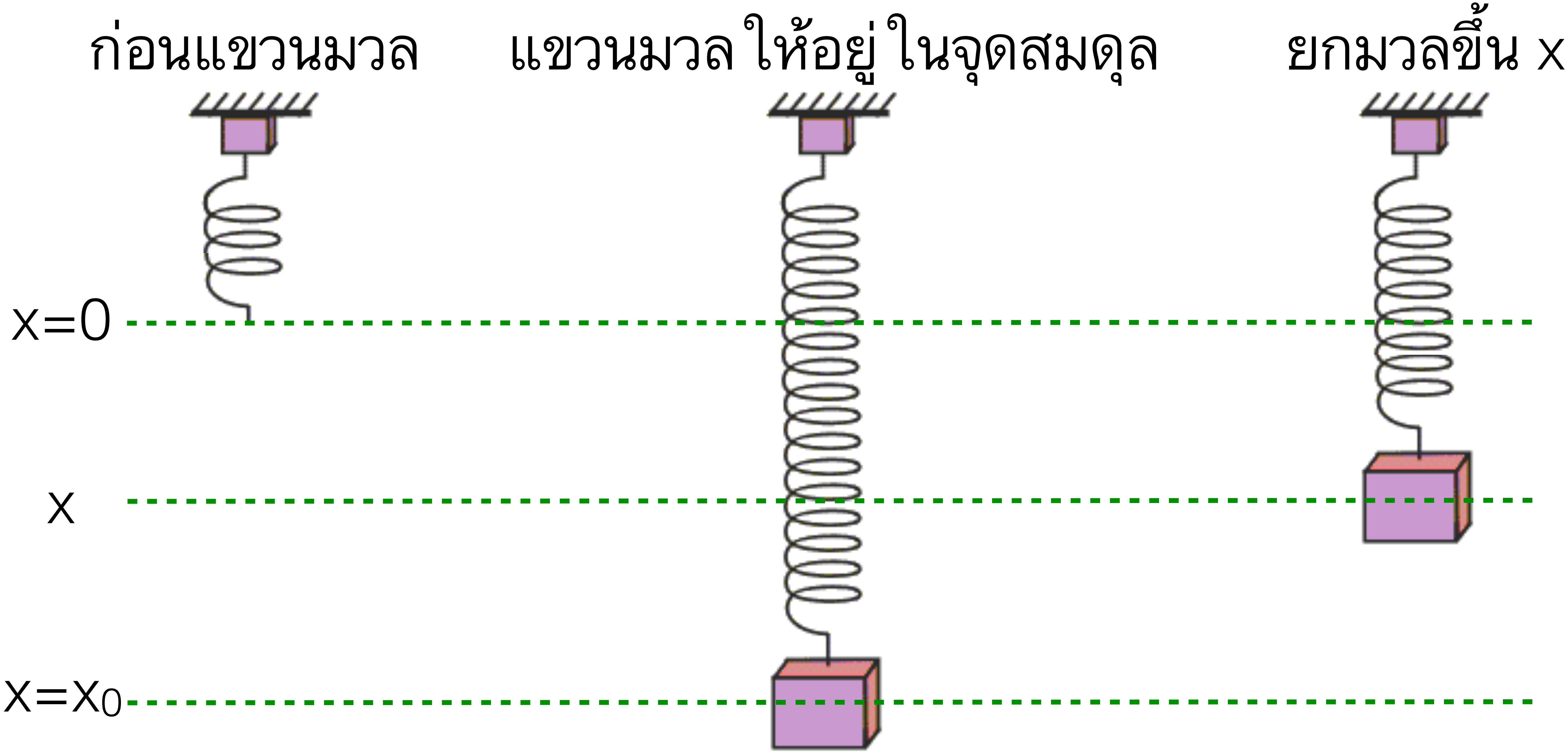
- มุมเฟสเริ่มต้น ในรูปแบบของการกระจัดและความเร็ว

$$\frac{v_0}{x_0} = -\omega \tan(\phi)$$

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

# Example - 1

ถ้าเราแขวนสปริงอันหนึ่งที่มีค่าคงตัวสปริง k และแขวนมวล m ไว้กับด้านล่างของสปริง ให้มวลอยู่ ในจุดสมดุล จากนั้นยกมวลสูงขึ้นกว่าจุดสมดุลเป็นระยะ x จงแสดงว่ามวลจะมีการเคลื่อนที่แบบ SHM




http://images.tutorvista.com/content/oscillations/block-spring-shm.gif

# Example - 1

ถ้ากำหนดให้ k = 50 N/m, m = 50g, x = 5 cm จงหา

- อำพล (Amplitude) และค่าความถี่เชิงมุม รวมทั้งเฟสเริ่มต้น
- คาบการเคลื่อนที่และความถี่
- อัตราเร็วและอัตราเร่งของมวล m ณ เวลา 3 วินาทีหลังปล่อย

# Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

- ไม่มีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน
- มวลสปริงมีค่าน้อยมาก
- แรงของสปริงเป็นแรงอนุรักษ์

➡ ผลรวมของงานทั้งหมด ที่เกิดขึ้นจากแรงดังกล่าว ในเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ครบรอบ มีค่าเป็นศูนย์

➡ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าว ในการเคลื่อนที่ระหว่างสองจุด ใดๆ ไม่ขึ้นกับเส้นทาง

- พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่าคงตัว

# Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

- พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่าคงตัว
  - ➡ พลังงานจลน์

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

  - ➡ พลังงานศักย์

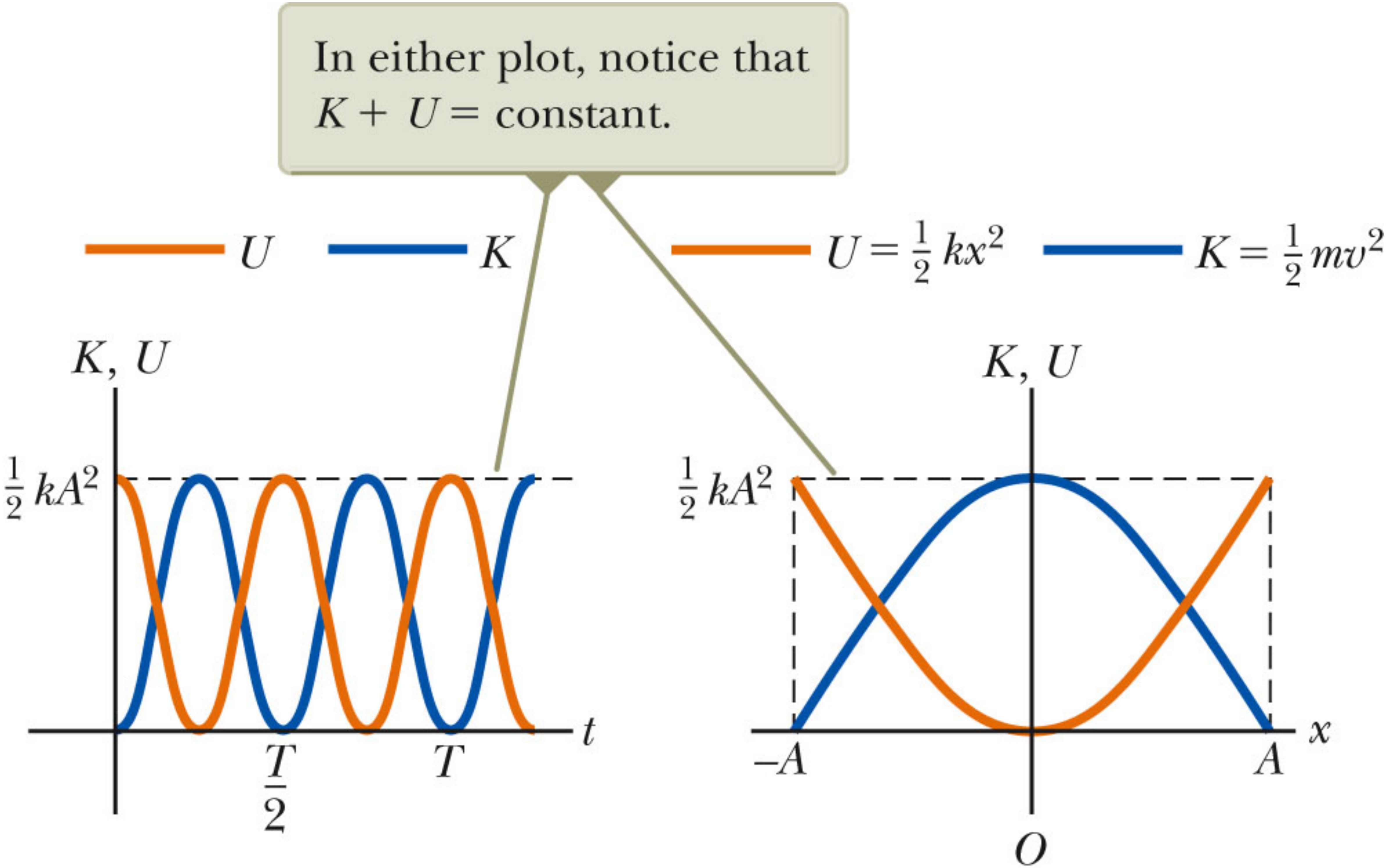
$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

  - ➡ พลังงานกล = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)\\ &= \frac{1}{2}kA^2\end{aligned}$$

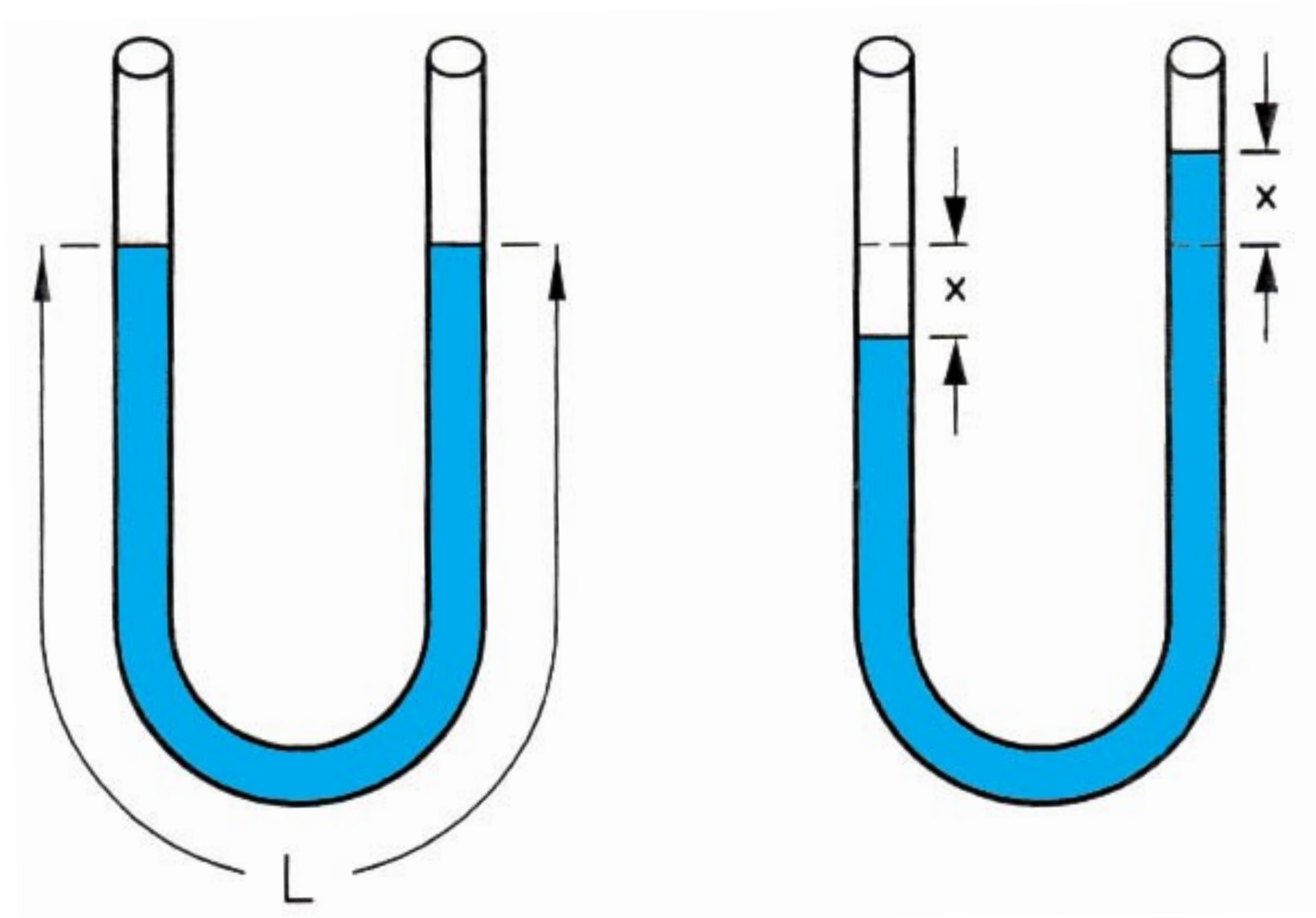
$$\boxed{\omega=\sqrt{k/m}}$$

# Energy


In either plot, notice that
$K + U =$ constant.
$U$
$K$
$U = \frac{1}{2}kx^2$
$K = \frac{1}{2}mv^2$
$K, U$
$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{2}$
$T$
$t$
$K, U$
$\frac{1}{2}kA^2$
$-A$
$A$
$x$
$O$

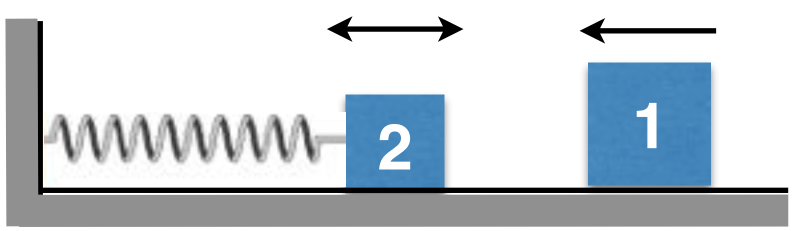
# Example - 2

จงหาสมการบรรยายถึง SHM และค่าความถี่เชิงมุมของระบบท่อน้ำปลายเปิดรูปตัว U ที่เกิดการสั่น โดยไม่คิดถึงแรงเสียดทานภายในท่อ ให้น้ำมีมวล M ความหนาแน่น $\rho$ และท่อปลายเปิดมีภาคตัดขวาง A



# Example - 3

กล่องหมายเลข 2 มีมวล 2.0 kg ติดอยู่ที่ปลายสปริงดังรูป กำลังเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีคาบเป็น 20 ms และกำหนดให้ตำแหน่งของกล่องเป็นไปตามสมการ

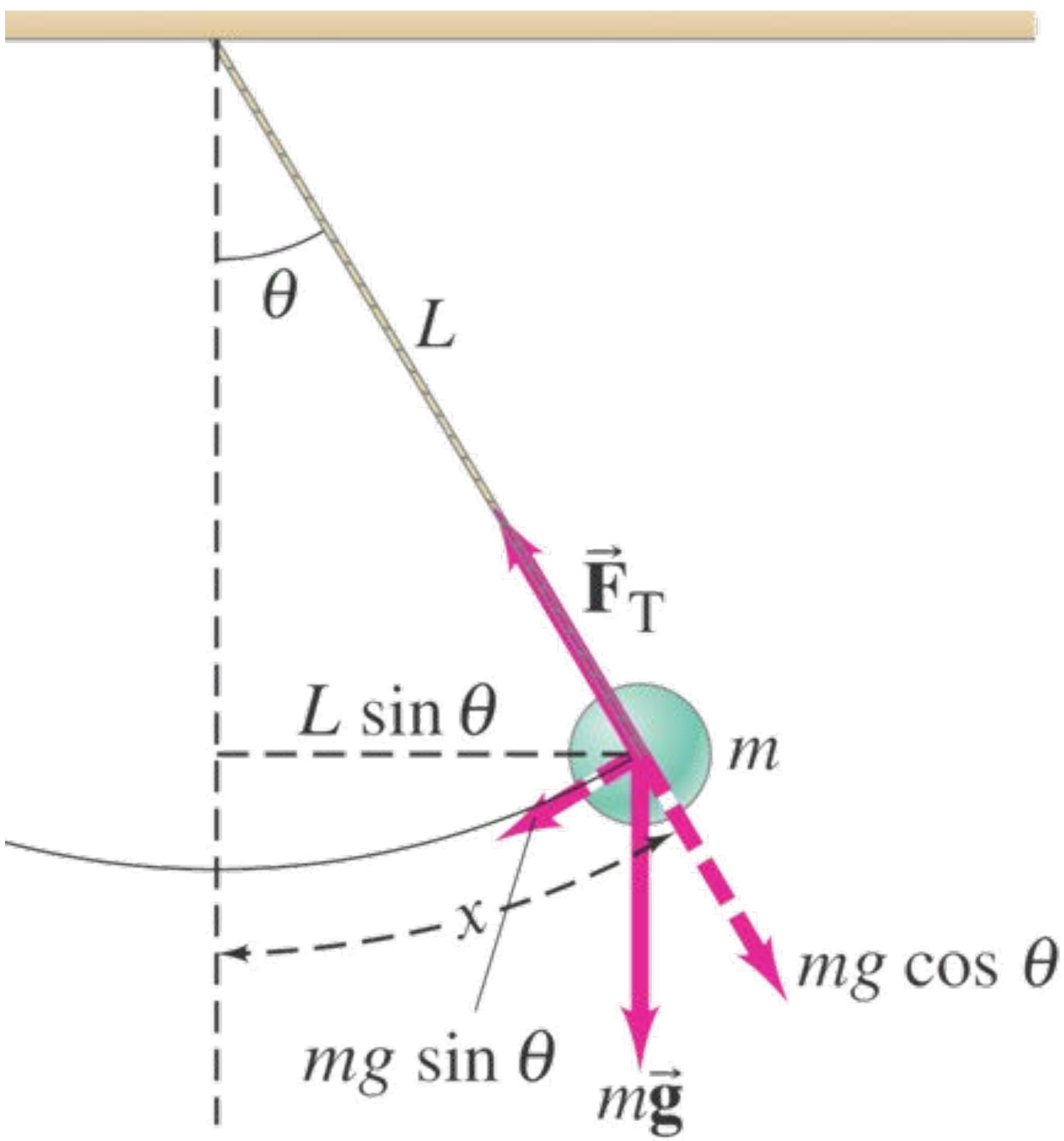



$$x(t) = (1.0\,\mathrm{cm})\cos(\omega t + \pi/2)$$

กล่องหมายเลข 1 มีมวล 4 kg ไถลเข้าหากล่องหมายเลข 2 ด้วยอัตราเร็วคงที่ 6.0 m/s ในทิศทางขนานกับความยาวของสปริง กล่องทั้งสองจะชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ที่เวลา 5 ms โดยหลังชนกล่องทั้งสองจะติดกันไป (ให้ถือว่าช่วงเวลาที่เกิดการชนน้อยกว่าคาบของการสั่นมาก ๆ) จงหา Amplitude ของการเคลื่อนที่แบบ SHM ภายหลังการชน

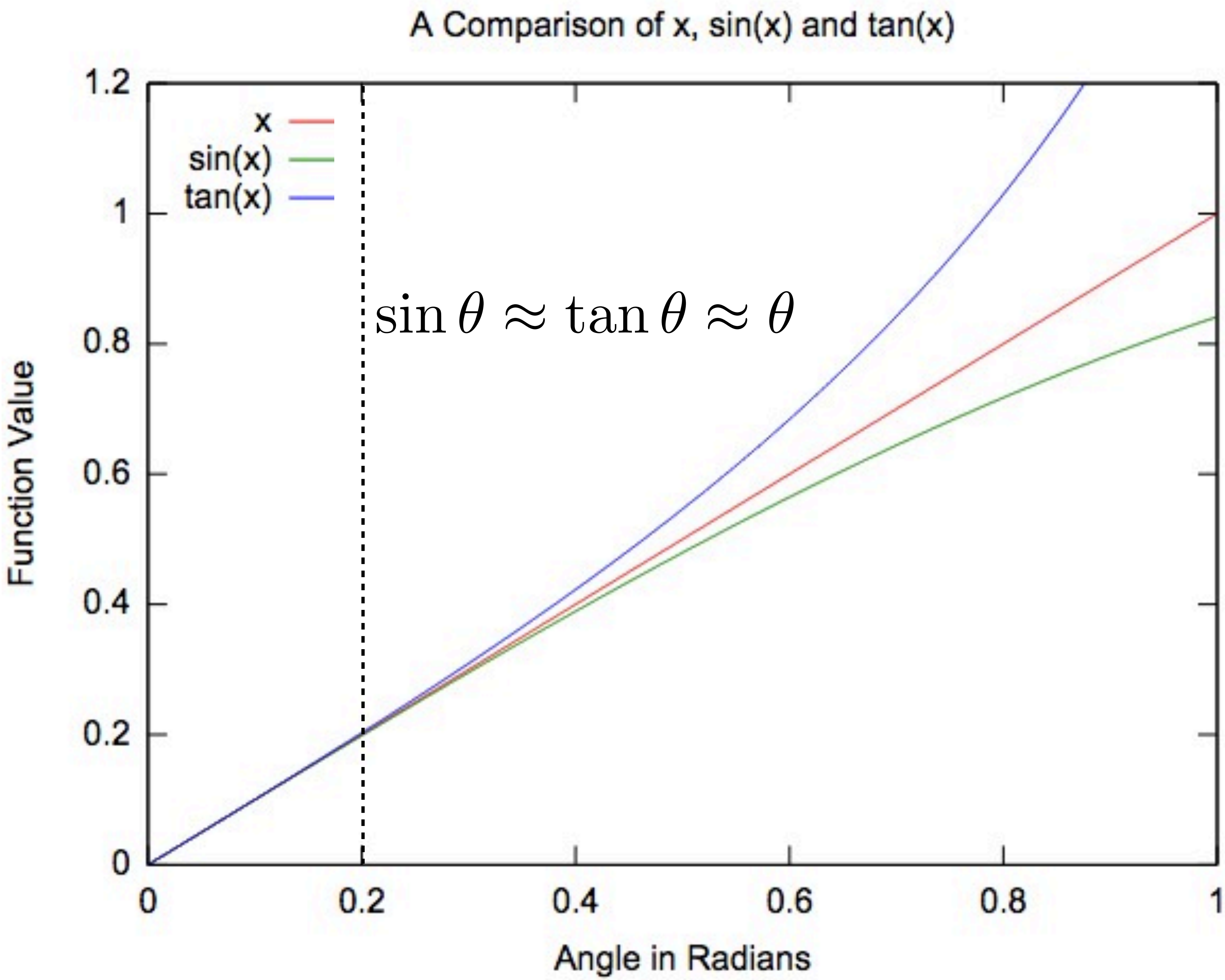
# Simple pendulum

แบบจำลองในอุดมคติของก้อนมวลที่แขวนไว้กับเชือกไร้มวลที่ไม่ยืด




- แรงตึงเชือกเป็นแรงที่ทำให้มวลเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมเท่านั้น
- แรงคืนตัวเกิดจากแรงโน้มถ่วง
- ในกรณีทั่ว ๆ ไป การเคลื่อนที่แบบนี้ไม่ได้เป็น SHM
  - ➡ สำหรับ SHM แรงคืนตัวแปรผันตรงกับการกระจัดจากจุดสมดุล
  - ➡ ในกรณีนี้แรงคืนตัวแปรผันตามค่า $\sin\theta$

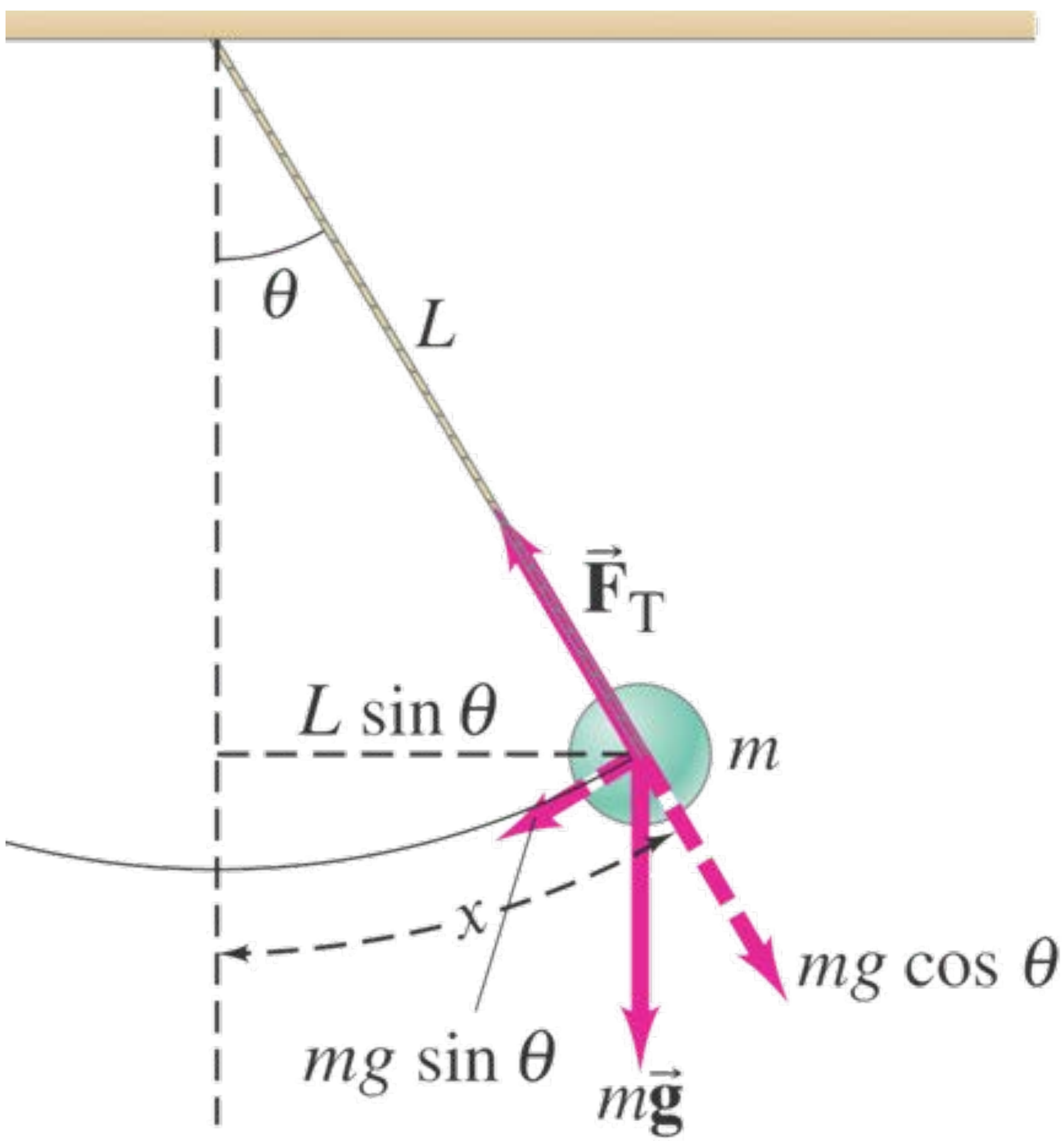
# Small-angle approximation




http://en.wikipedia.org/wiki/Small-angle_approximation

# Simple pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ ($x \approx L\theta$) การแกว่งจะเป็น SHM



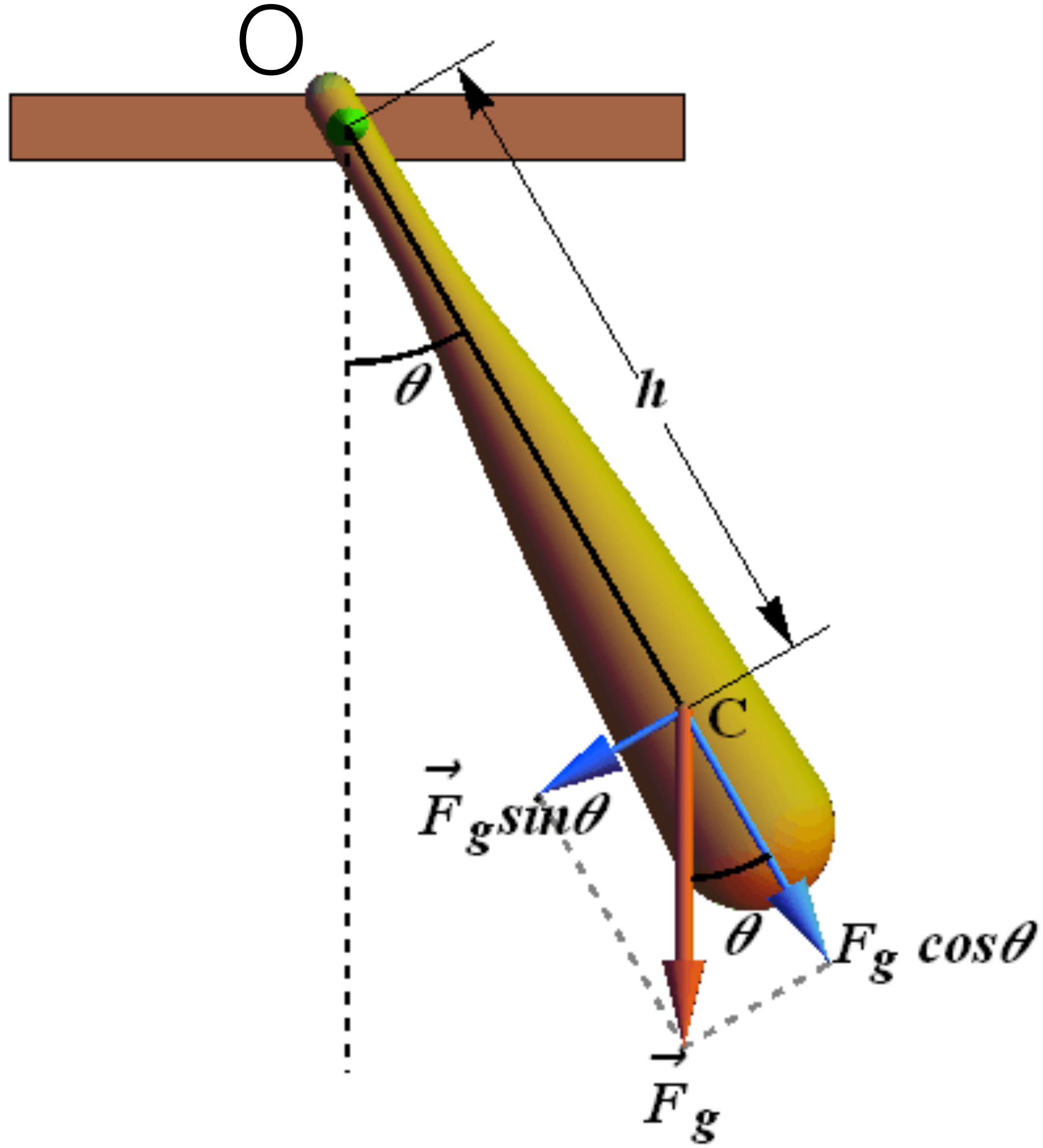

$$F = -mg\theta$$
$$= -\frac{mg}{L}x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{L}x}$$ ← **SHM**

เป็น SHM ที่มี $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$

# Physical pendulum

เป็นการแกว่งของวัตถุที่มีขนาดจำกัด โดยเราจะพิจารณาทอร์คคืนตัว โดย ในรูปเป็นการแกว่งของไม้เบสบอลรอบแนวแกนที่พุ่งออกจากกระดาษ (แทนด้วยแกน Z) ผ่านจุด O โดยมี C เป็นจุดศูนย์กลางมวล




- h = ระยะจากจุดหมุน O ถึง C
- ทอร์กตามแนวแกน Z หาได้จาก

$$\tau_o = -(r \times F) = -(mg)(h \sin\theta)$$

แรงคืนตัว (Restoring force)

- ถ้า ให้ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุเกร็ง จาก

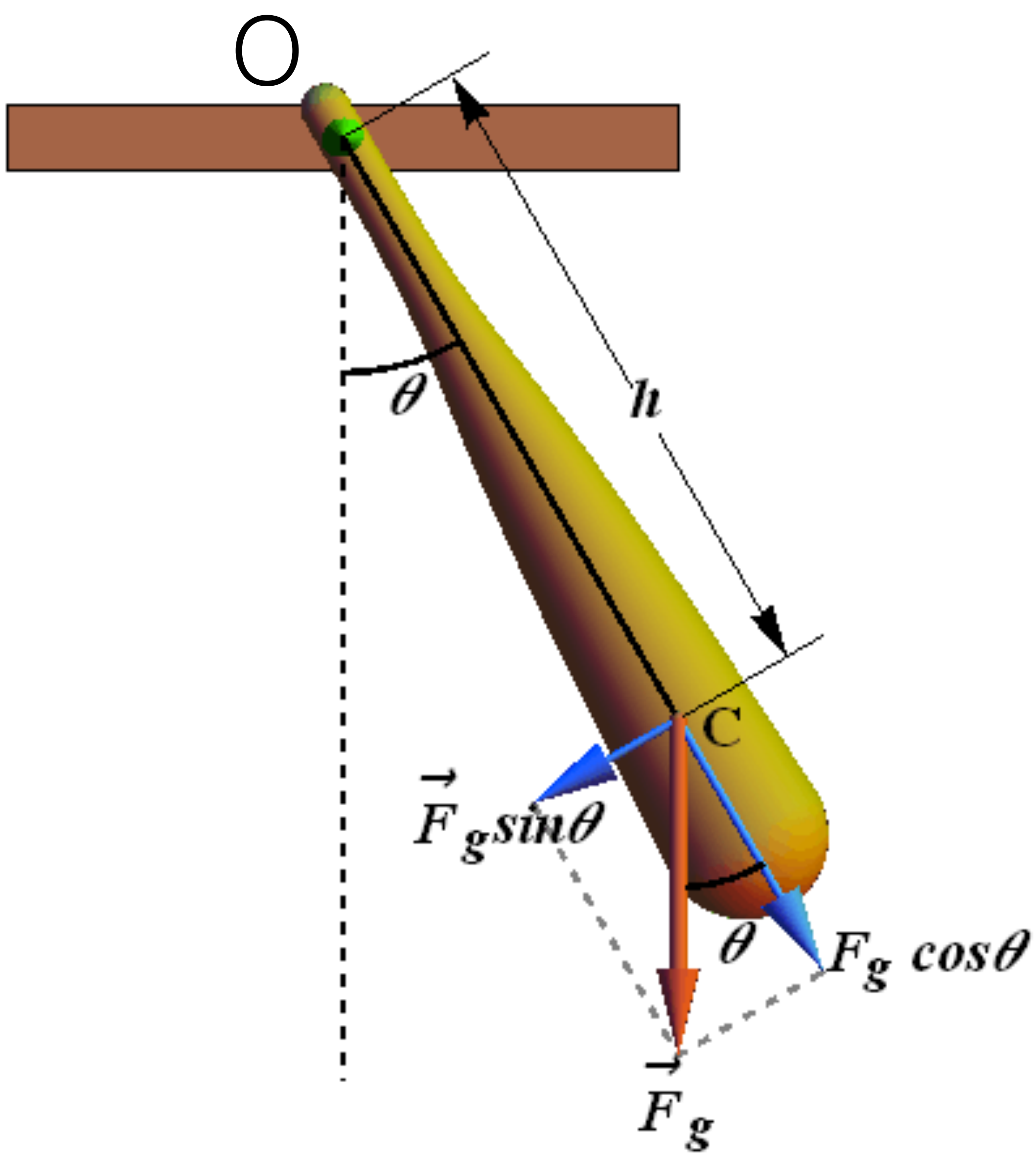
$$\tau_o = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I}\sin\theta = 0$$

http://www.rakeshkapoor.us/ClassNotes/HTMLFiles/Oscillations_98.gif

# Physical pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$




$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{mgh}{I}\right)\theta = 0}$$ ← **SHM**

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

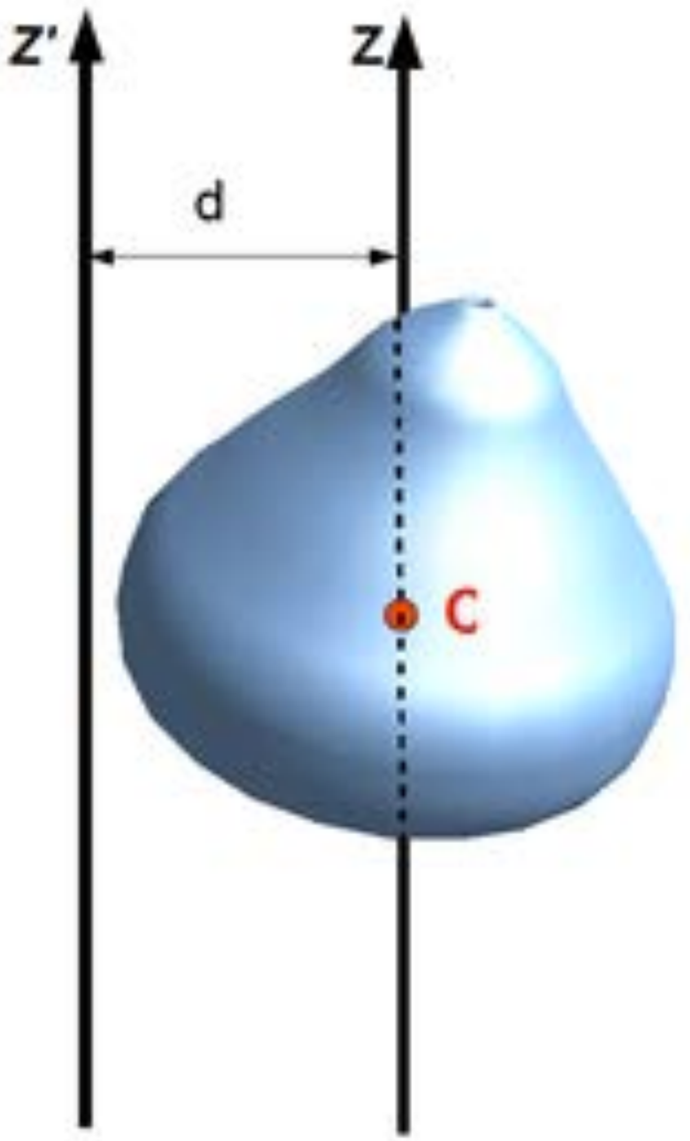
ความถี่เชิงมุม $\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$

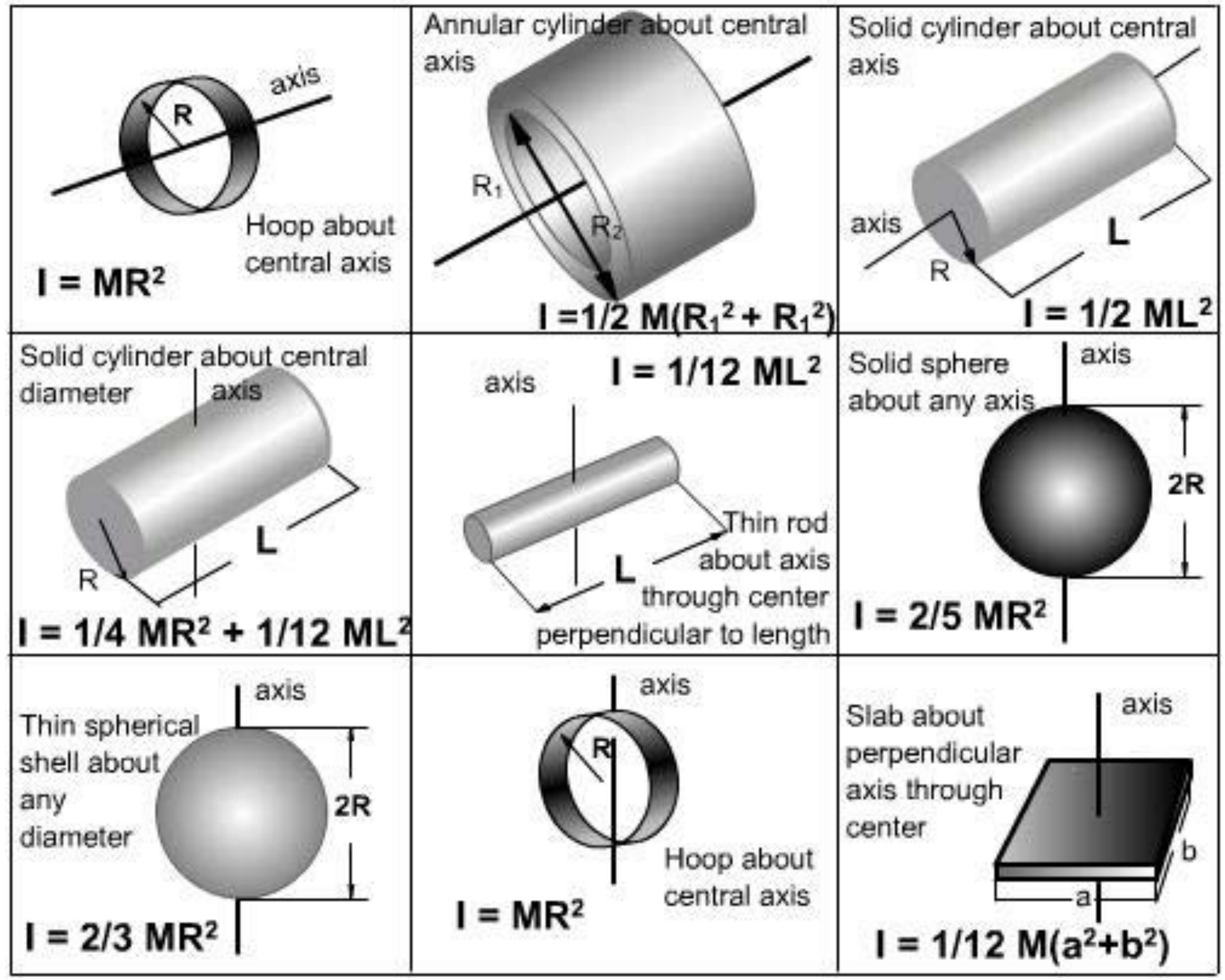
คาบ $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$

**ขึ้นอยู่กับมวลหรือไม่ (?)**

# Moment of inertia

## Parallel axis theorem

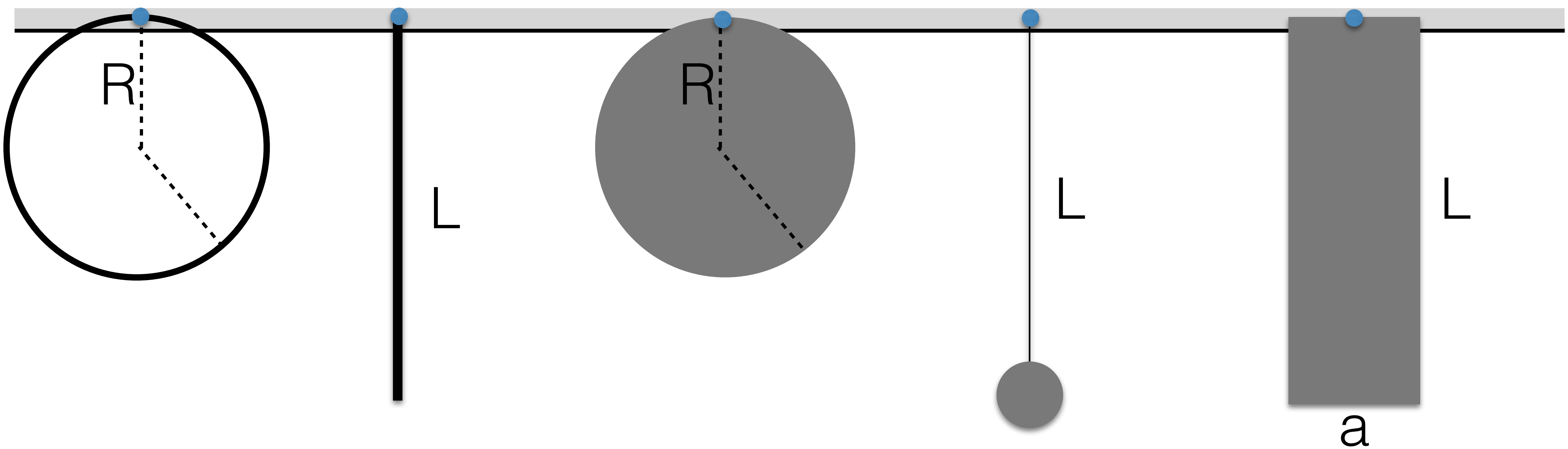



$$I_{z'} = I_{cm} + Md^2$$

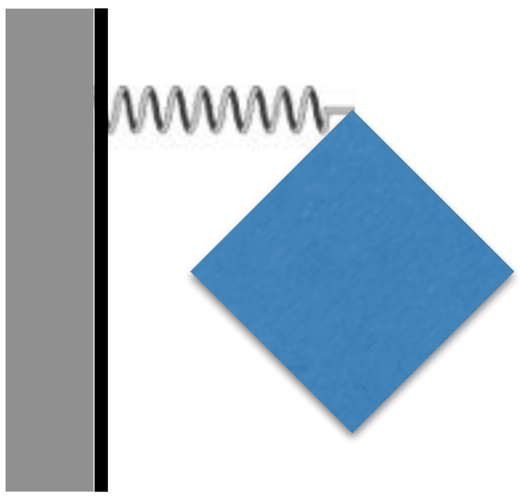
# Example - 4

จงหาคาบของการแกว่งของระบบต่อไปนี้ และสรุปว่าคาบของการแกว่งขึ้นอยู่กับมวลหรือไม่ ให้การหมุนนี้อยู่ในแนวกระดาษ แกนของการหมุนคือทิศที่พุ่งออกจากกระดาษ




เปรียบเทียบขนาดของวัตถุ ถ้าต้องการให้วัตถุทุกชิ้นมีคาบเท่ากัน

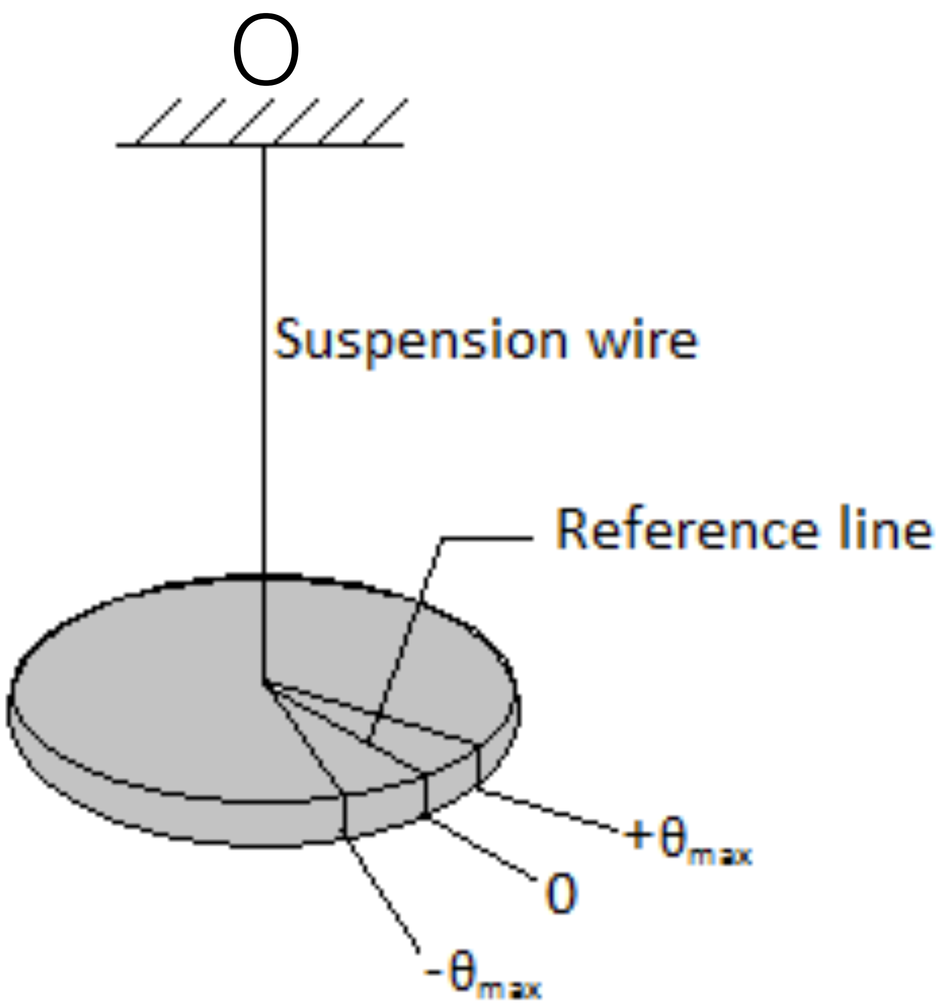
# Example - 5



กล่องลูกบาศก์มวล 3.0 kg แต่ละด้านยาวด้านละ 6 cm โดยติดอยู่กับแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของมัน ดังรูป  ที่มุมด้านบนของกล่องมีสปริง ที่มีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 1200 N/m เชื่อมอยู่โดยยึดติดกับผนัง ในตอนแรกสปริงไม่มีการยืดหรือกดตัว ถ้าเราหมุนกล้องเป็นมุม 3 องศา แล้วปล่อยให้แกว่งแบบ SHM จงคำนวณหาคาบของการแกว่ง

# Torsion pendulum

พิจารณาจานหมุน




Torsion constant

$$\tau_o = -\kappa\theta = I\alpha$$

$$= -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

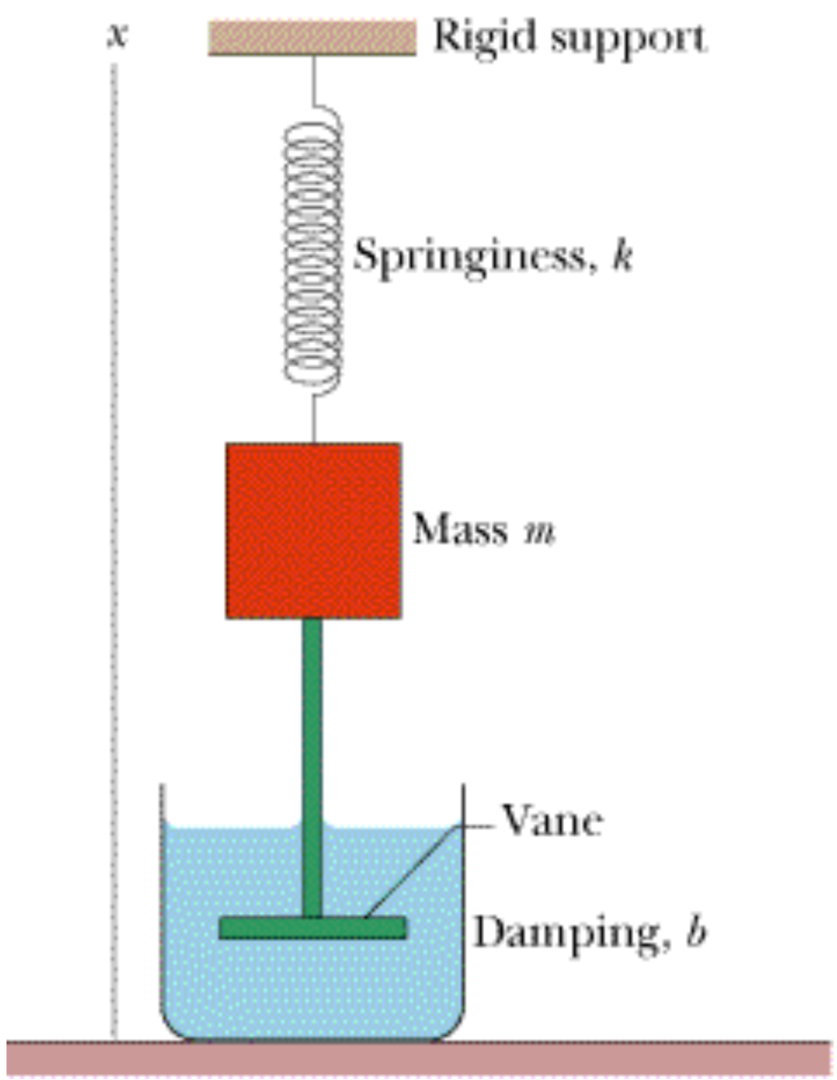
$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta = 0}$$ ← **SHM**

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

# Damped oscillations

พิจารณา ในสถานการณ์ที่สมจริงมากยิ่งขึ้น โดยมีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน หรือแรงต้านอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง การแกว่งที่เกิดขึ้นจะถูกหน่วง




พิจารณาเฉพาะแนวแกน x ตามรูป

**Damping force**

$$F_d = -b\nu \qquad F_s = -kx$$

**Damping constant**

แรงที่กระทำต่อมวล m (พิจารณาว่าผลของแรงโน้มมีน้อยมากเมื่อเทียบกับ $F_d$ และ $F_s$)

$$-b\nu - kx = ma$$

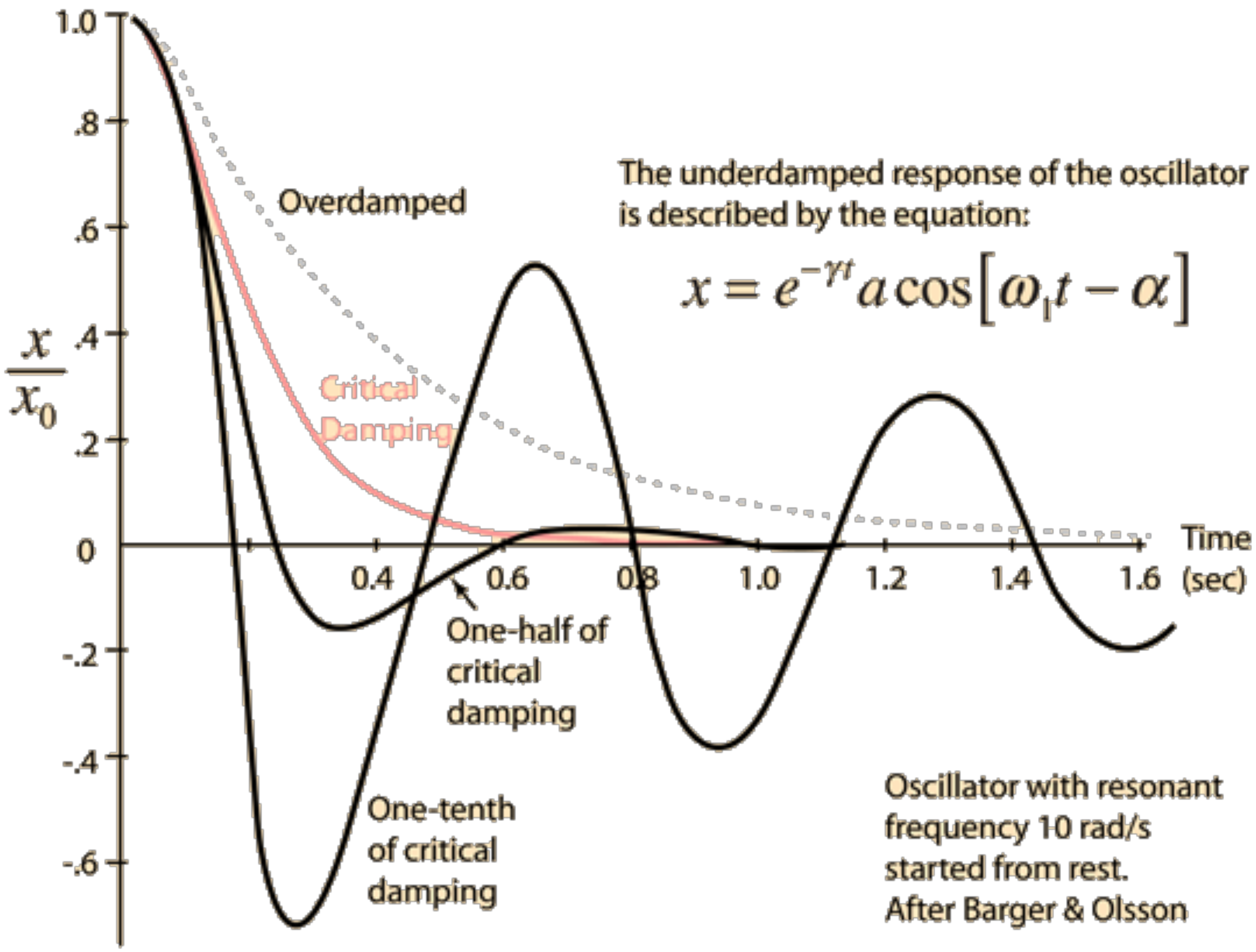
ค่าคงที่ของความหน่วง $\gamma = b/2m$

http://www.webassign.net/hrw/hrw7_15-15.gif

# Damped oscillations

ถ้าเราพิจารณาสมการ $m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$

ใช้คำตอบที่อยู่ในรูป $x(t) = e^{\lambda t}$ จะได้ว่า $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$




**Overdamped**

$b^2 - 4mk > 0$

กลับสู่สมดุลโดยไม่แกว่ง

**Critical damping**

$b^2 - 4mk = 0$

กลับสู่สมดุลเร็วที่สุดโดยไม่แกว่ง

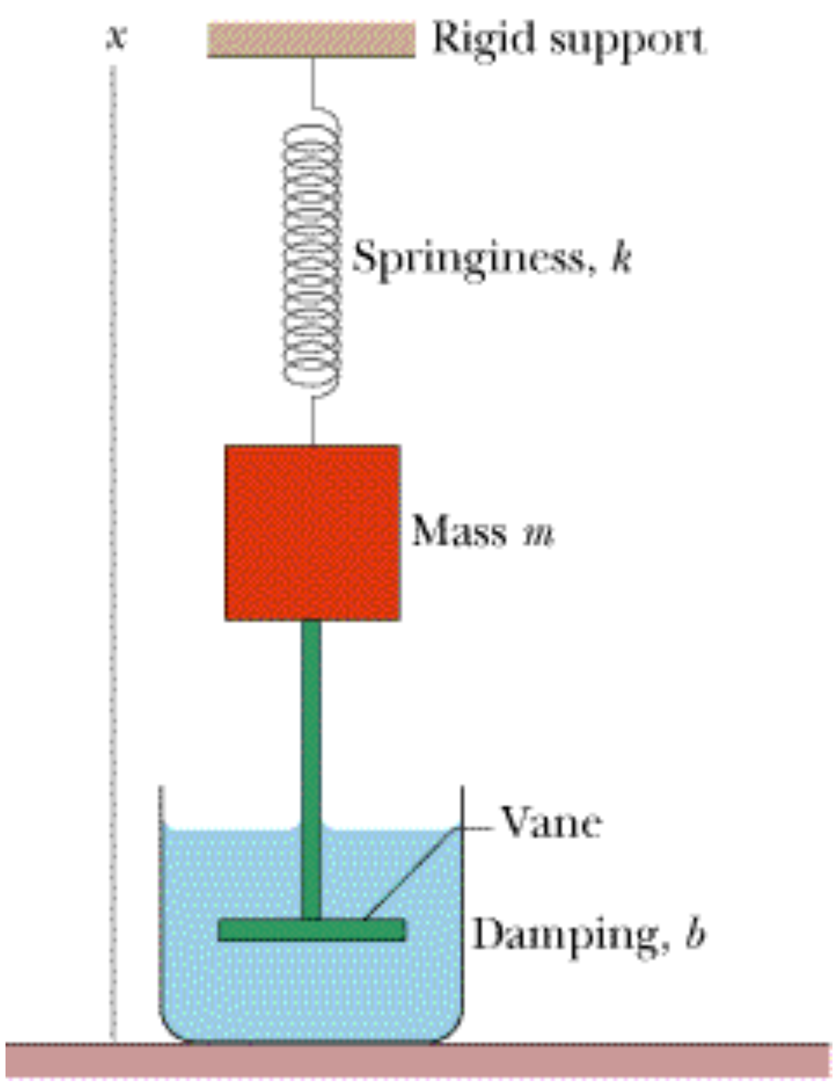
**Underdumped**

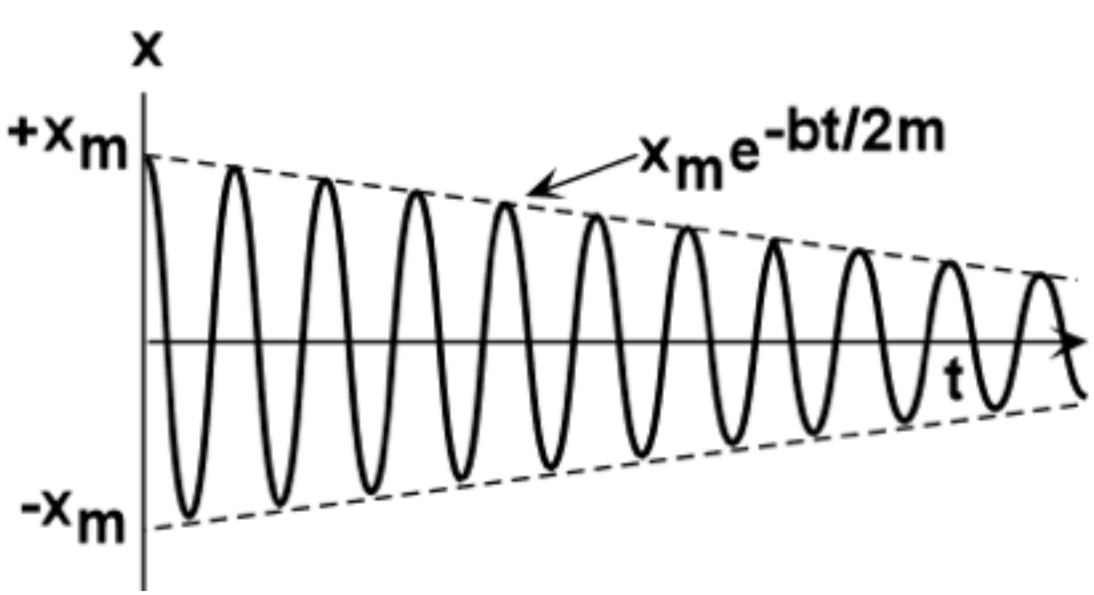
$b^2 - 4mk < 0$

เกิดการแกว่งโดย Amplitude ค่อย ๆ ลดลง

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/oscda.html#c1

# Underdamped oscillations




$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

คำตอบของสมการจะได้ว่า

$$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

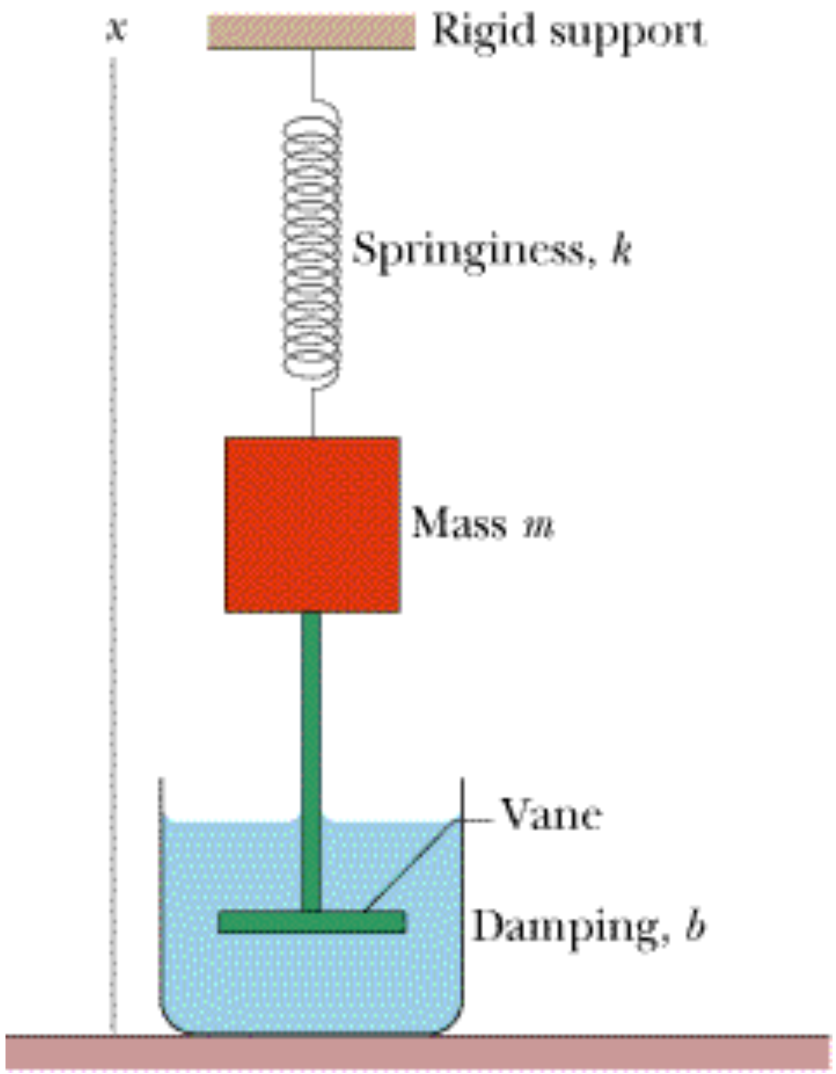
และค่าความถี่เชิงมุมมีค่าเป็น

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

มีจุดที่น่าสังเกต 2 อย่างคือ

- Amplitude มีค่าลดลงตามเวลา
- Angular frequency มีค่าลดลง ส่งผลให้คาบมีค่าเพิ่มมากขึ้น (แรงต้านทำให้วัตถุเคลื่อนที่ช้าลง)

# Example - 6



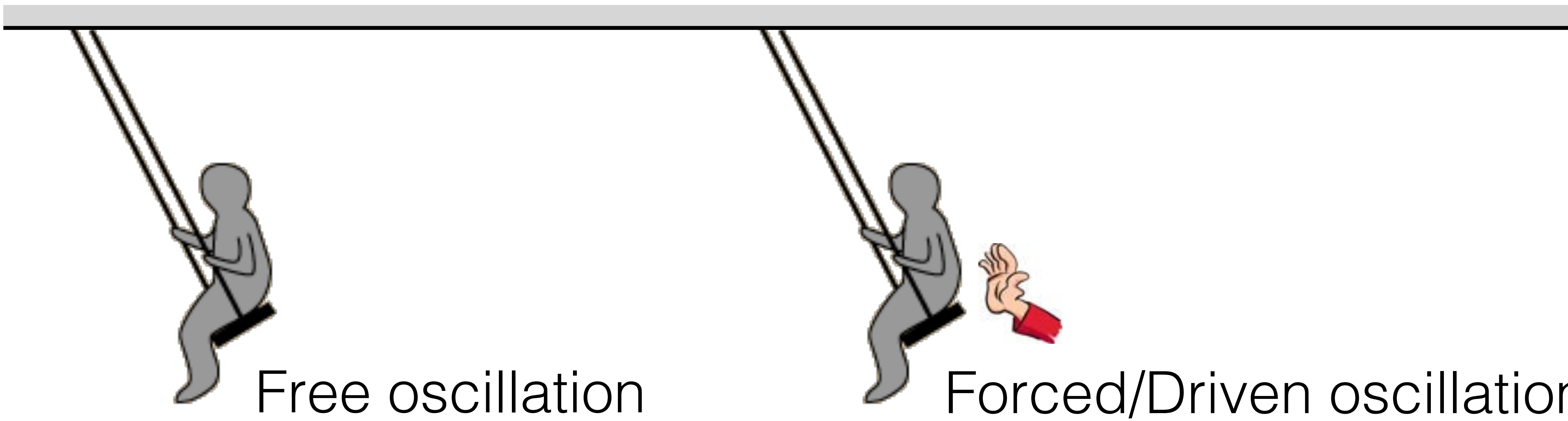

พิจารณาจากระบบตามรูป ให้ m = 250 g, k = 85 N/m, และ b = 70 g/s จงคำนวณหา

(ก) คาบของการเคลื่อนที่

(ข) ระยะเวลาเท่าใดที่ค่า Amplitude ของการเคลื่อนที่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น

(ค) ระยะเวลาเท่าใดที่พลังงานกลของระบบลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น

# Forced oscillations and resonance

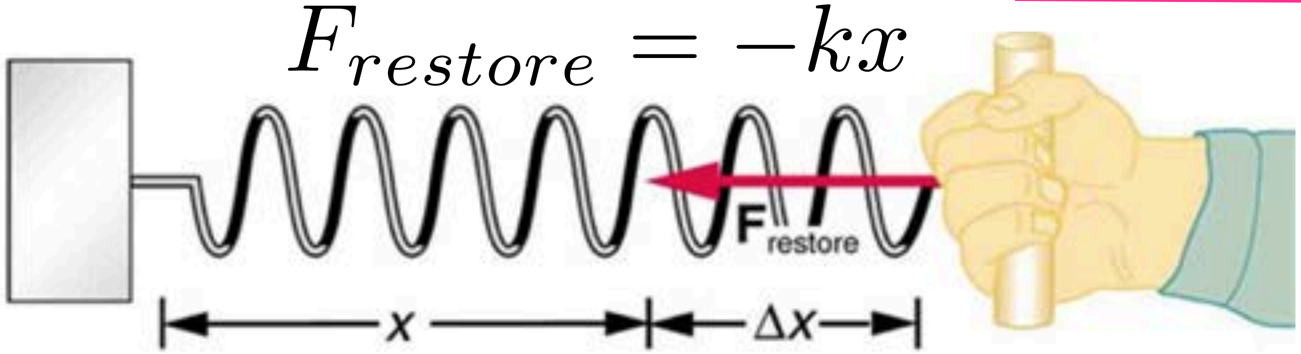



ในกรณีของ Forced oscillation นั้นเรามีความถี่เชิงมุมที่เกี่ยวข้องกับระบบอยู่สองค่าคือ

- ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural angular frequency, $\omega_0$) บอกถึงค่าความถี่เชิงมุมของระบบที่ถูกทำให้แกว่งจากการกระทำเพียงขณะหนึ่ง จากนั้นปล่อยให้แกว่งโดยอิสระ (สิ่งที่เรียนมาก่อนหน้า)
- Angular frequency ที่เกิดจากแรงขับ (Driving force), $\omega_d$

# Forced oscillations and resonance

$$F_{restore} = -kx$$




$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$ma = -kx + F_0 \cos \omega_d t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_d t$$

เมื่อเวลาผ่านไปนานพอสมควร ระบบจะสั่นด้วยความถี่ที่เราใส่เข้าไป

$$x = A \cos \omega_d t$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_d \sin \omega_d t$$

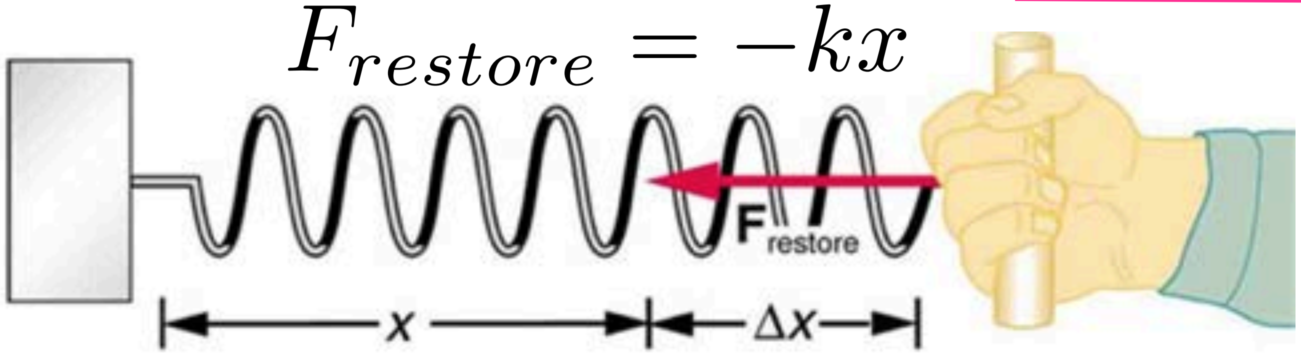
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_d^2 \cos \omega_d t$$

http://philschatz.com/physics-book/resources/Figure_04_01_02.jpg

# Forced oscillations and resonance

$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$F_{restore} = -kx$$




$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_d t$$

$$-A\omega_d^2 \cos \omega_d t + \frac{kA}{m}\cos \omega_d t = \frac{F_0}{m}\cos \omega_d t$$

$$A\left(\frac{k}{m} - \omega_d^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega_d^2}$$

$$\omega_0 \gg \omega_d;\, A = F_0/k$$

$$\omega_0 \ll \omega_d;\, A \to 0$$

$$\omega_0 = \omega_d;\, A \to \infty$$

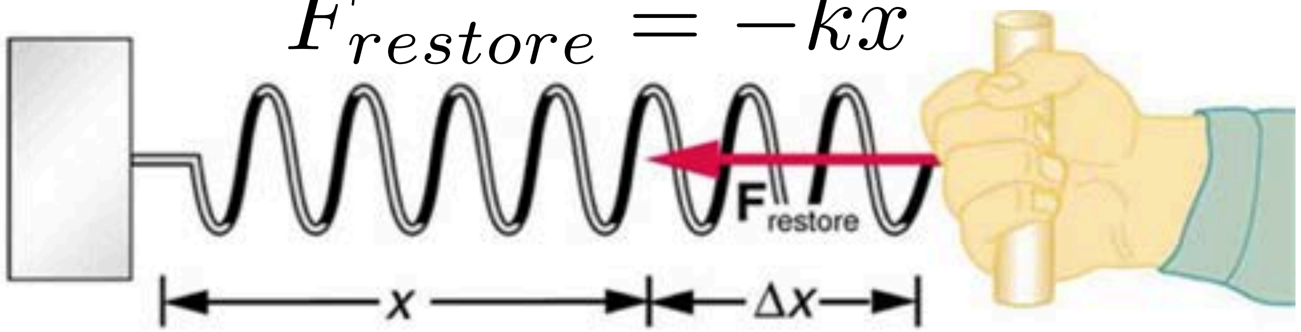
**Resonance (การสั่นพ้อง)**

# Forced oscillations and resonance

พิจารณาแรงต้านอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง

$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$F_{restore} = -kx$$




$$F_{air} = -b\nu$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_d t$$

คำตอบของสมการนี้ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

- Transient solution
- Steady solution

# Forced oscillations and resonance

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$

Transient solution

Steady solution

$$x(t) = A_h e^{-bt/2m}\sin(\omega' t + \phi_h) + A\cos(\omega' t + \phi)$$

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}$$

Resonance จะเกิดเมื่อ A มีค่ามากที่สุด

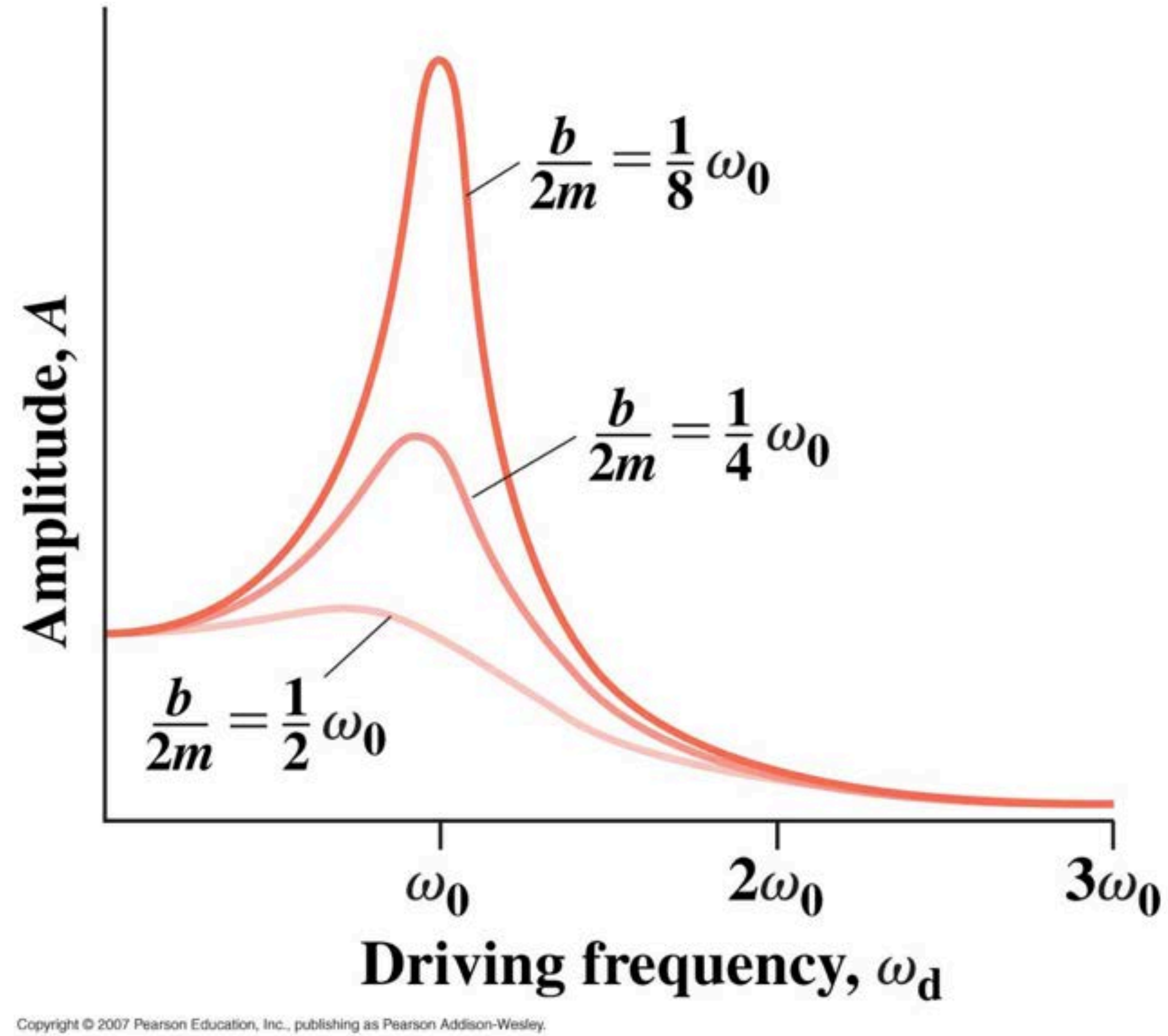
$$\frac{d}{d\omega_d}\left(\frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}\right) = 0$$

ได้ว่า $\omega_d = 0$ หรือ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$

ไม่ใช่สิ่งที่เราสนใจ

# Forced oscillations and resonance

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

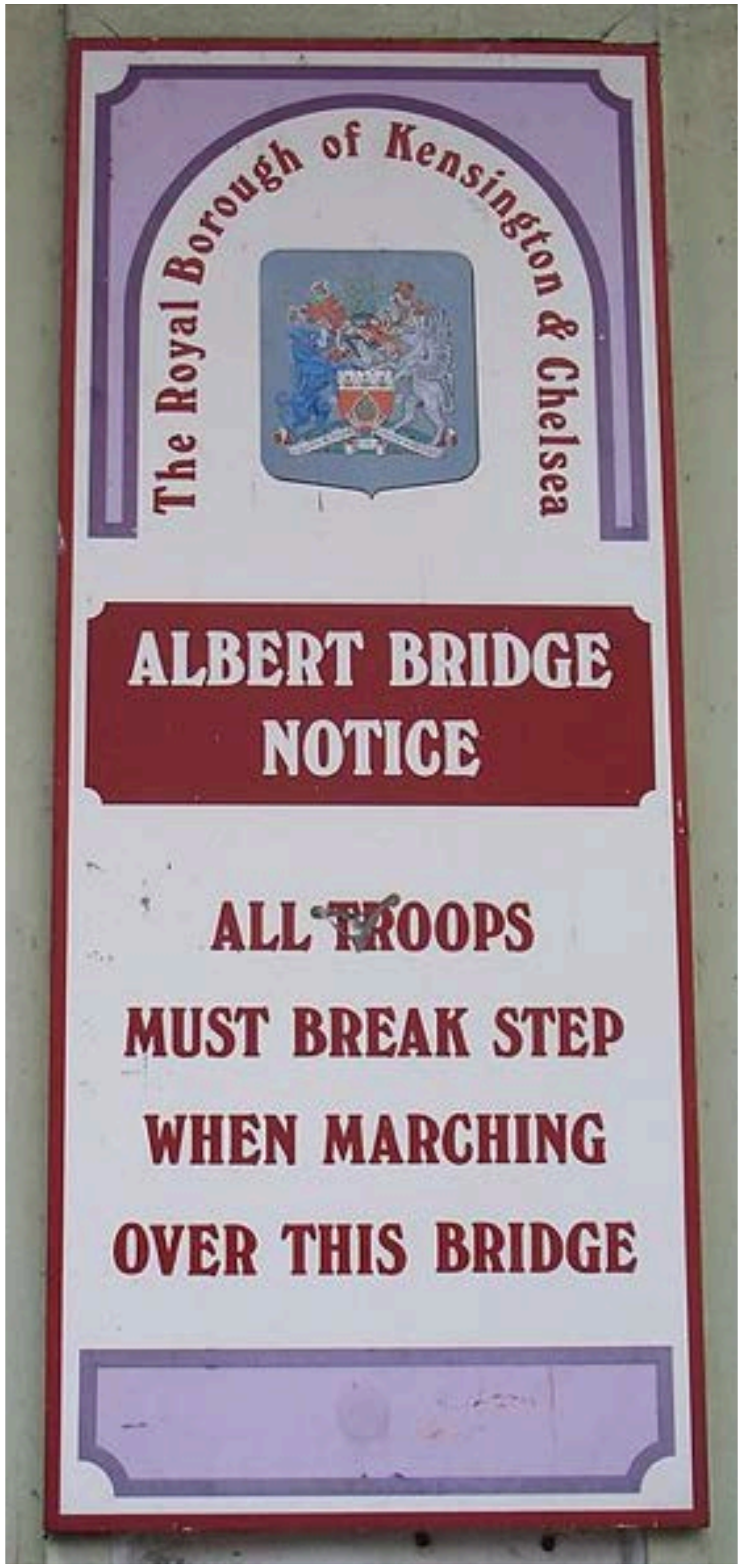



http://www.physics.louisville.edu/cldavis/phys298/notes/resonance_fig2.jpg

# Forced oscillations and resonance

ในการก่อสร้างต่าง ๆ “resonance disaster” บรรยายถึงการถล่มของสิ่งก่อสร้างซึ่งเกิดจากการสั่นที่มีค่าเท่ากับค่าความถี่ธรรมชาติของสิ่งก่อสร้างนั้น ๆ

- Failure of the original Tacoma Narrows Bridge
- Collapse of Broughton Suspension Bridge (due to soldiers walking in step)
- Collapse of Angers Bridge
- Collapse of Königs Wusterhausen Central Tower
- Resonance of the Millennium Bridge
- Evacuation of the 39-story TechnoMart commercial-residential high-rise in Korea in 2011 due to a class performing Tae Bo exercises to the song "The Power".



# Exercises

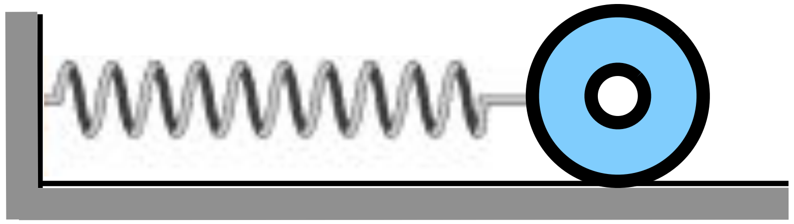
มีกล่องมวล m วางอยู่บนพื้นลื่นอันหนึ่ง มีสปริงสปริงสองตัวติดอยู่กับกล่องดังรูป โดยสปริงแต่ละตัวมีค่าคงที่ของสปริง k จงหา

(1) ค่าความถี่เชิงมุมของระบบ

(2) ความเร็วสูงสุดของกล่อง

(3) ถ้าต้องการให้ระบบนี้มีค่าความถี่เชิงมุมเท่ากับระบบแบบเดียวกัน แต่มีสปริงเพียงตัวเดียว (ค่าคงที่เท่ากับ k) เราจะต้องเปลี่ยนแปลงมวลของกล่องอย่างไร

# Exercises

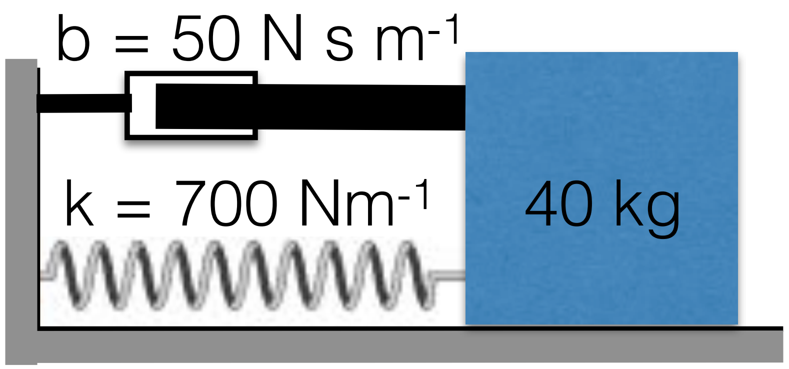


ล้อขนาดเล็กอันหนึ่งยึดติดกับกำแพงด้วยสปริงที่มีค่าคงที่ของสปริง k ตอนเริ่มต้นทำการเลื่อนล้อออกจากกำแพงบนพื้นลื่นเป็นระยะทาง A จงหา

(1) ความเร็วของกล่องเมื่อผ่านจุดสมดุล

(2) ความถี่เชิงมุม และคาบของระบบ

# Exercises




จากระบบดังรูป เมื่อเราไถลกล่องบนพื้นลื่นออกไปเป็นระยะทาง 20 ซม. แล้วปล่อย จงหาว่า

(1) จะเกิดการ damping แบบใด จงแสดงวิธีคำนวณ และหากเป็น Underdamping จะเกิดด้วยความถี่เท่าไหร่

(2) ถ้าต้องการภายหลังการปล่อยกล่อง กล่องกลับสู่จุดสมดุลเร็วที่สุดโดยไม่เกิดการสั่น จะต้องเปลี่ยนแปลงค่า damping constant เป็นเท่าใด

# Exercises

**นิสิตควรหัดทำแบบฝึกหัดท้ายบทของหนังสืออ้างอิง**