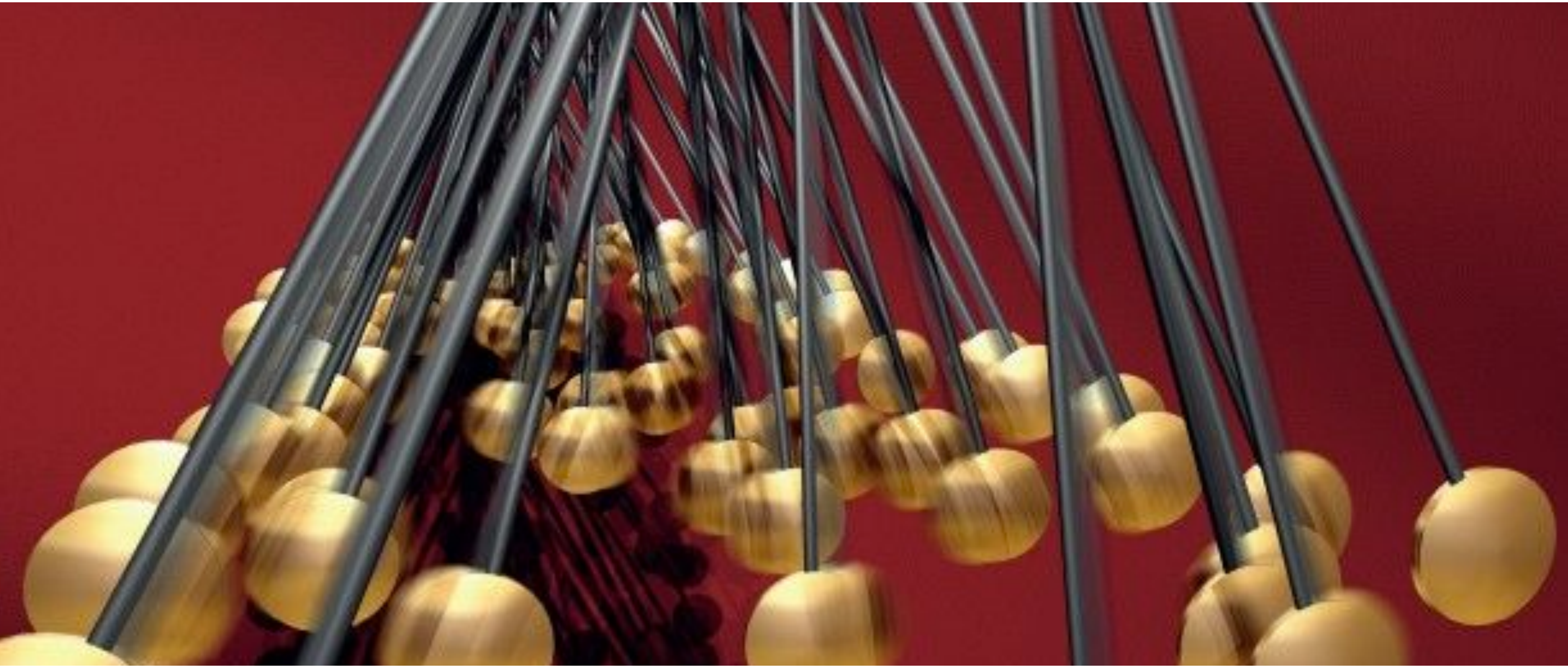
Updated: Oct 7, 2017



Simple harmonic motion

N. Srimanobhas
Norraphat.Srimanobhas@cern.ch

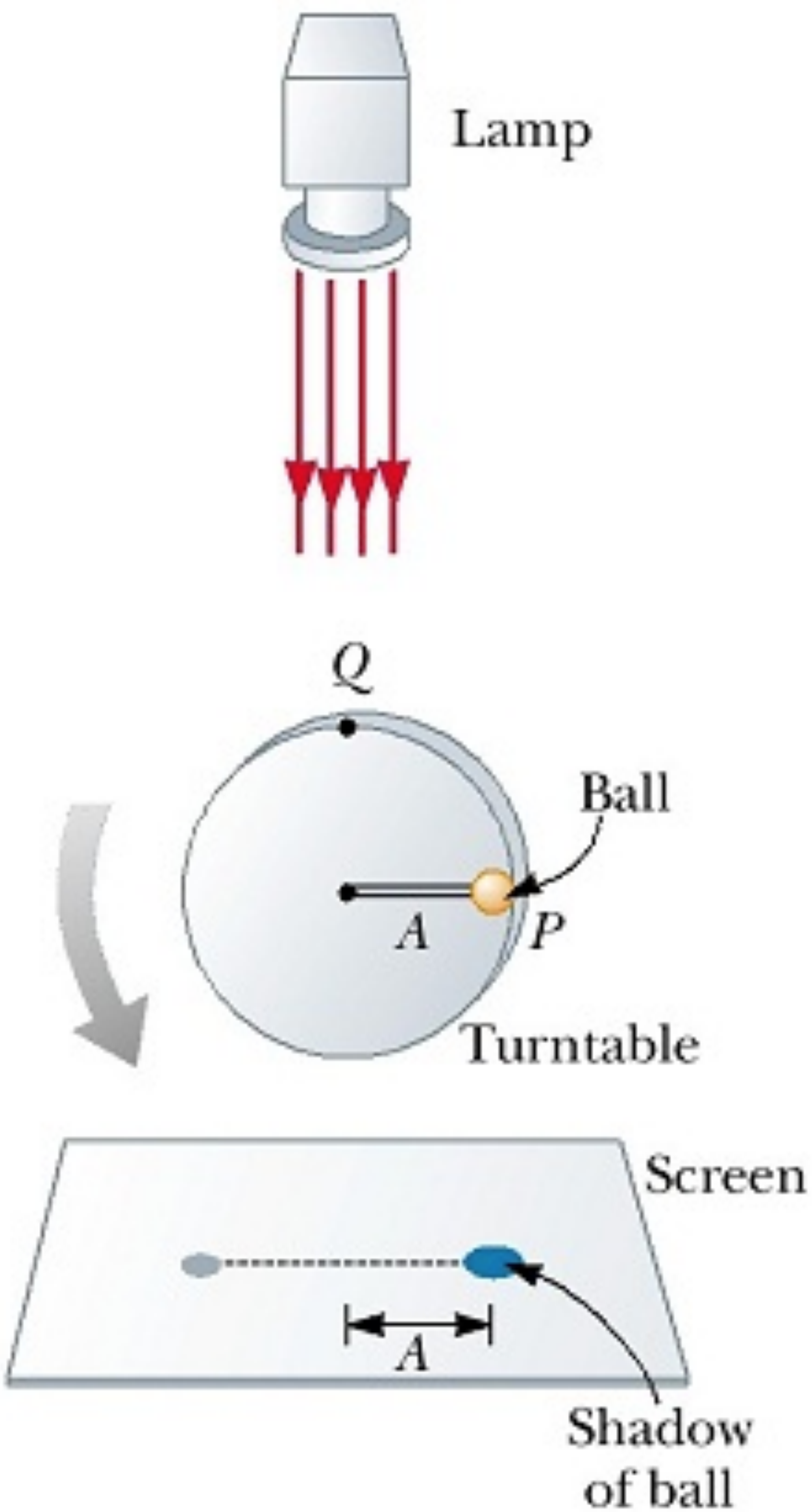
https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/Main/PhatSrimanobhasTeaching

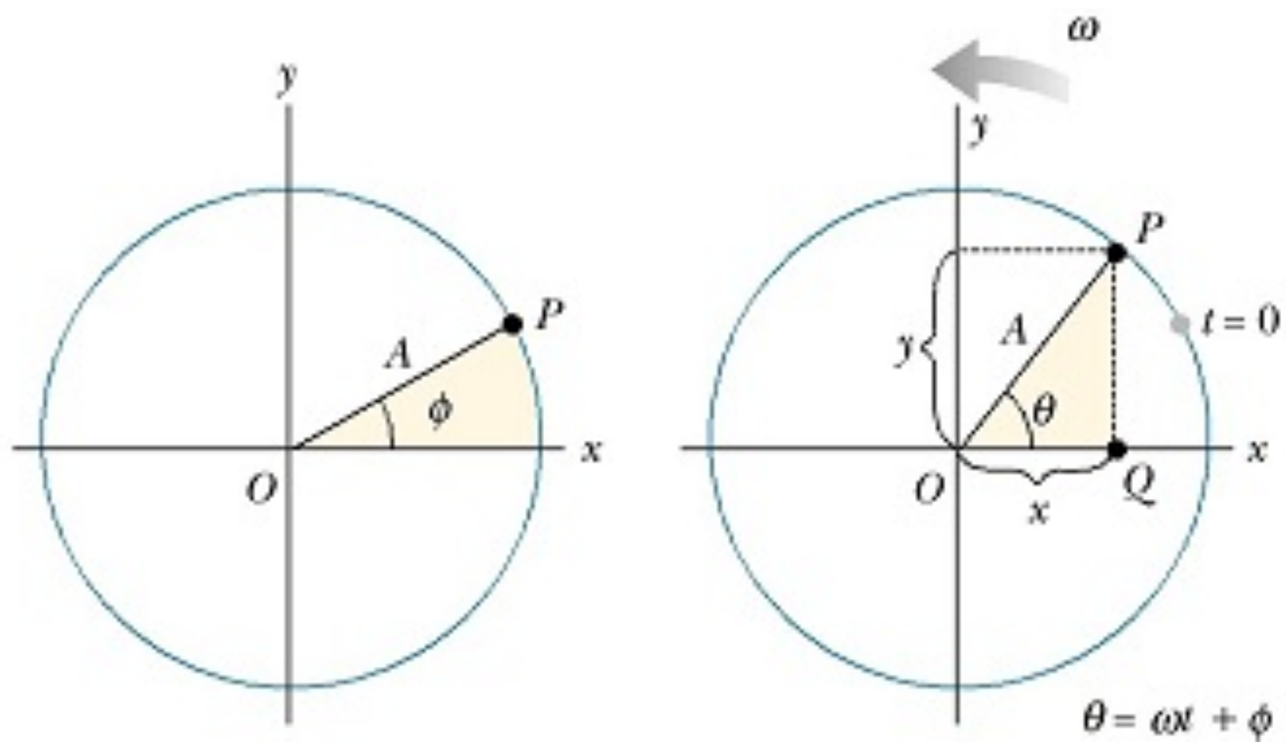
เรียนอะไรบ้าง

- **Simple harmonic motion**
  - Uniform circular motion
  - Simple harmonic motion
    - Energy
  - Simple pendulum
    - Small-angle approximation
  - Physical pendulum
  - Torsion pendulum
  - Linear differential equation (ไม่ออกข้อสอบ สำหรับคนที่ต้องการรู้เพิ่มเติม)
  - Damped oscillations
  - Forced oscillations and resonance

นิสิตควรทำแบบฝึกหัดทุกข้อ ในเอกสารนี้ ให้ได้เอง
และฝึกทำแบบฝึกหัดท้ายบทของหนังสืออ้างอิงเพิ่มเติม

Uniform circular motion





$$x(t) =$$

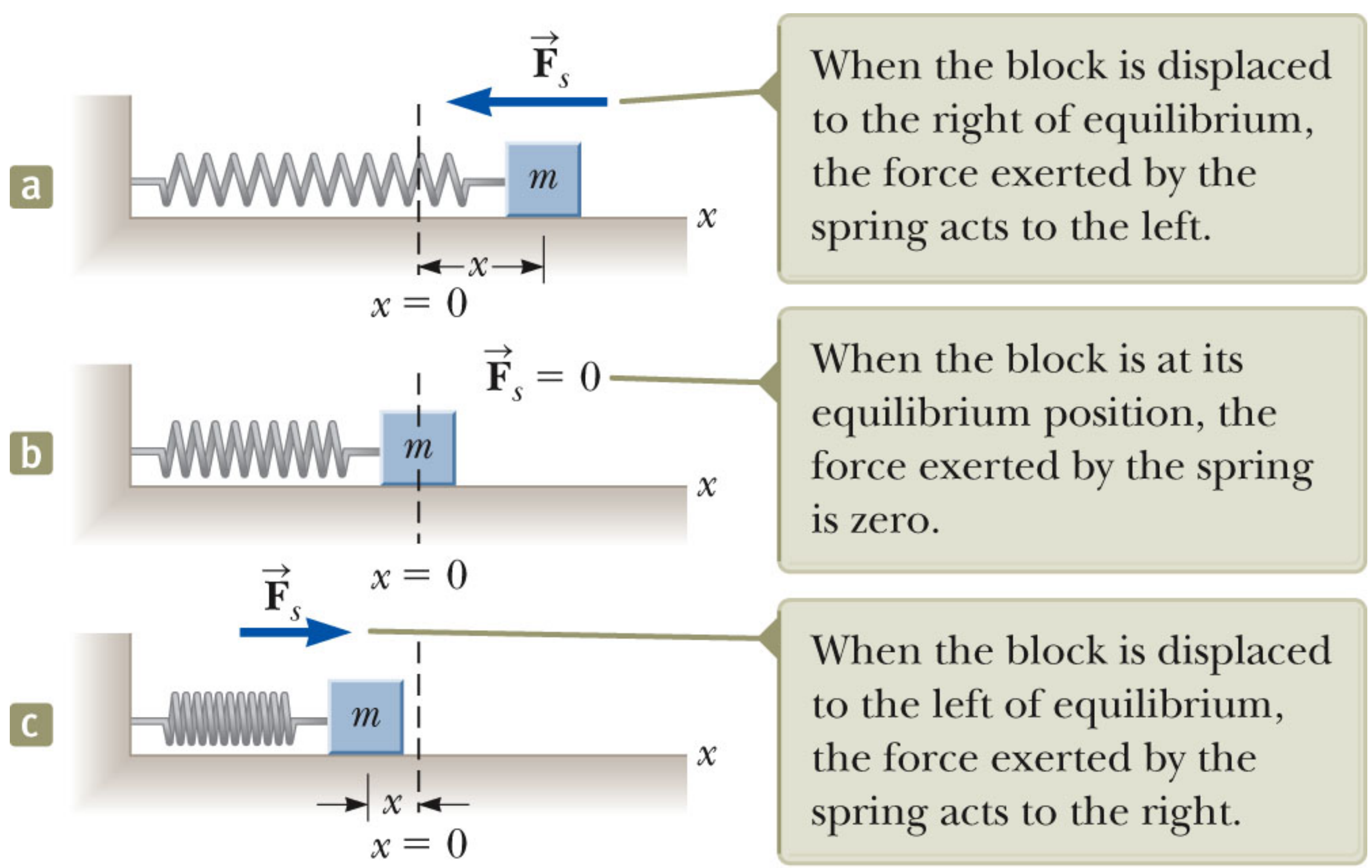
$$T = \quad , f =$$

คาบ (Period) ความถี่ (Frequency)

Simple harmonic motion

การเคลื่อนที่แบบ SHM เป็นรูปแบบหนึ่งของ periodic motion โดยมีเงื่อนไขคือ

- แรง (แรงคืนตัว) แปรผันตรงกับ
- แรงมีทิศทาง จุดสมดุล (equilibrium position) เสมอ
- แรงมีเครื่องหมาย การกระจัดเสมอ



$$F =$$

Simple harmonic motion: solution

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x(t) =$$

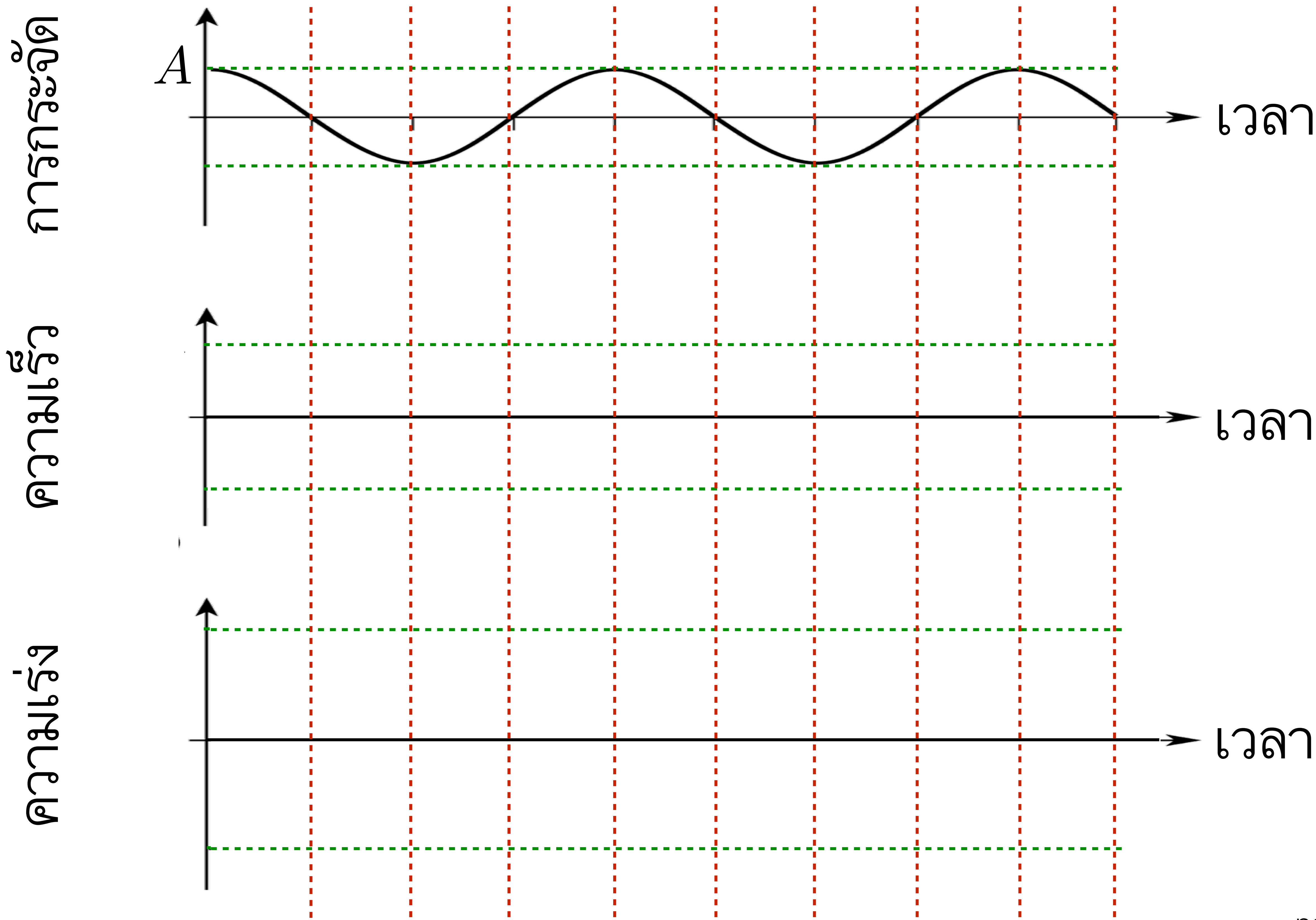
$$v(t) =$$

$$a(t) =$$

ฟังก์ชั่น sine กับ cosine นั่นมีค่าอยู่ระหว่าง หมายความว่า

- วัตถุเคลื่อนที่อยู่ระหว่าง
- อัตราเร็วสูงสุดอยู่ที่
- อัตราเร่งอยู่ที่
- จงบอกตำแหน่งที่วัตถุมี (1) อัตราเร็วสูงสุด และ (2) อัตราเร่งสูงสุด

Simple harmonic motion



Simple harmonic motion

เราสามารถหา

- อัตราเร็ว ในรูปแบบของการกระจัด

- มุมเฟสเริ่มต้น ในรูปแบบของการกระจัดและความเร็ว

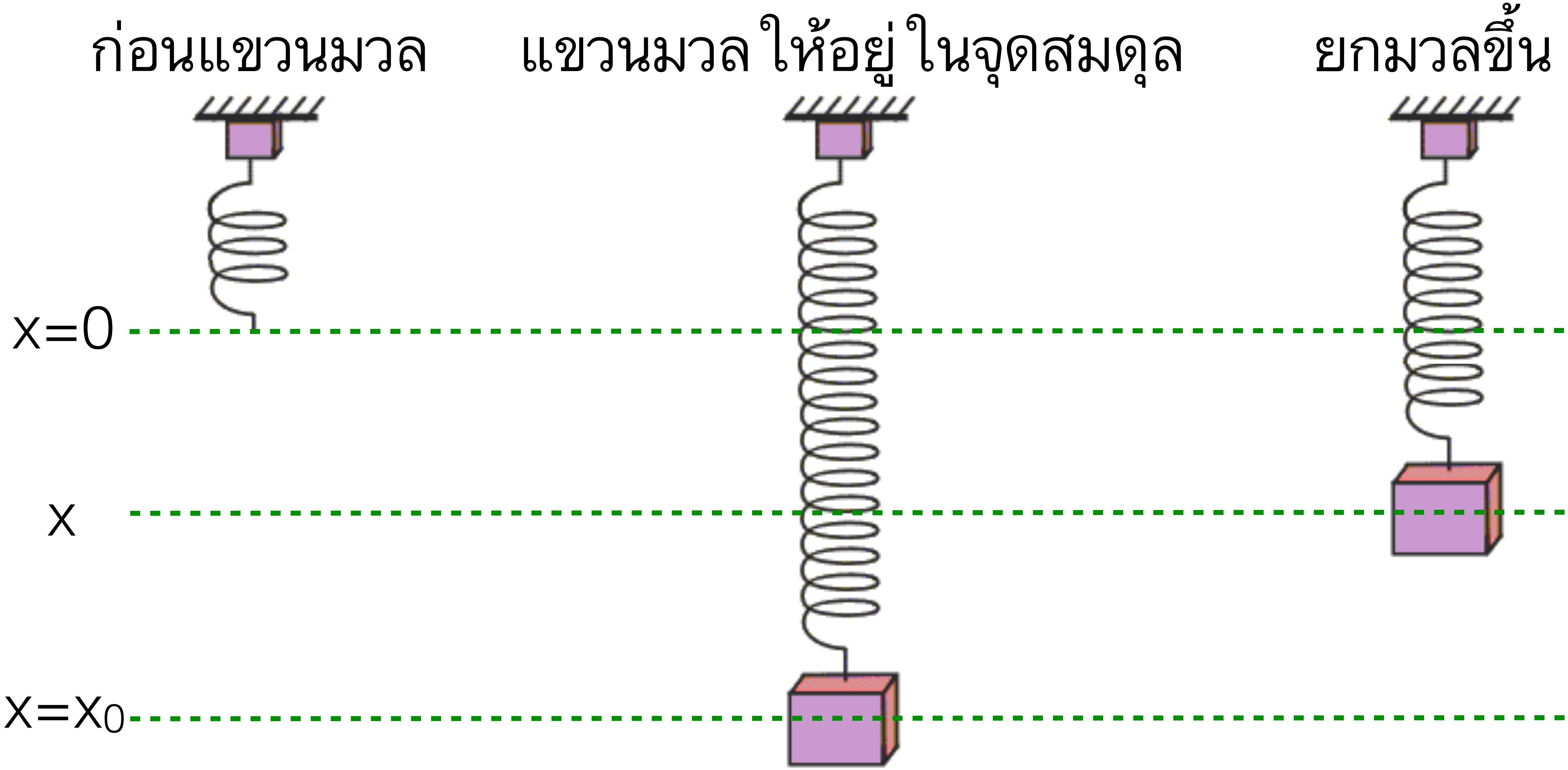
Example 1

ถ้ากำหนดให้ k = 50 N/m, m = 50g, x = 5 cm จงหา

- อำพล (Amplitude) และค่าความถี่เชิงมุม รวมทั้งเฟสเริ่มต้น
- คาบการเคลื่อนที่และความถี่
- อัตราเร็วและอัตราเร่งของมวล m ณ เวลา 3 วินาทีหลังปล่อย

Example 2

ถ้าเราแขวนสปริงอันหนึ่งที่มีค่าคงตัวสปริง k และแขวนมวล m ไว้กับด้านล่างของสปริงให้มวลอยู่ในจุดสมดุล จากนั้นยกมวลสูงขึ้นกว่าจุดสมดุลเป็นระยะ x จงแสดงว่ามวลจะมีการเคลื่อนที่แบบ SHM



http://images.tutorvista.com/content/oscillations/block-spring-shm.gif

Example 2

Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

- ไม่มีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน
- มวลสปริงมีค่าน้อยมาก
- แรงของสปริงเป็นแรงอนุรักษ์

➡ ผลรวมของงานทั้งหมด ที่เกิดขึ้นจากแรงดังกล่าว ในเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ครบรอบ มีค่าเป็นศูนย์

➡ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าว ในการเคลื่อนที่ระหว่างสองจุดใดๆ ไม่ขึ้นกับเส้นทาง

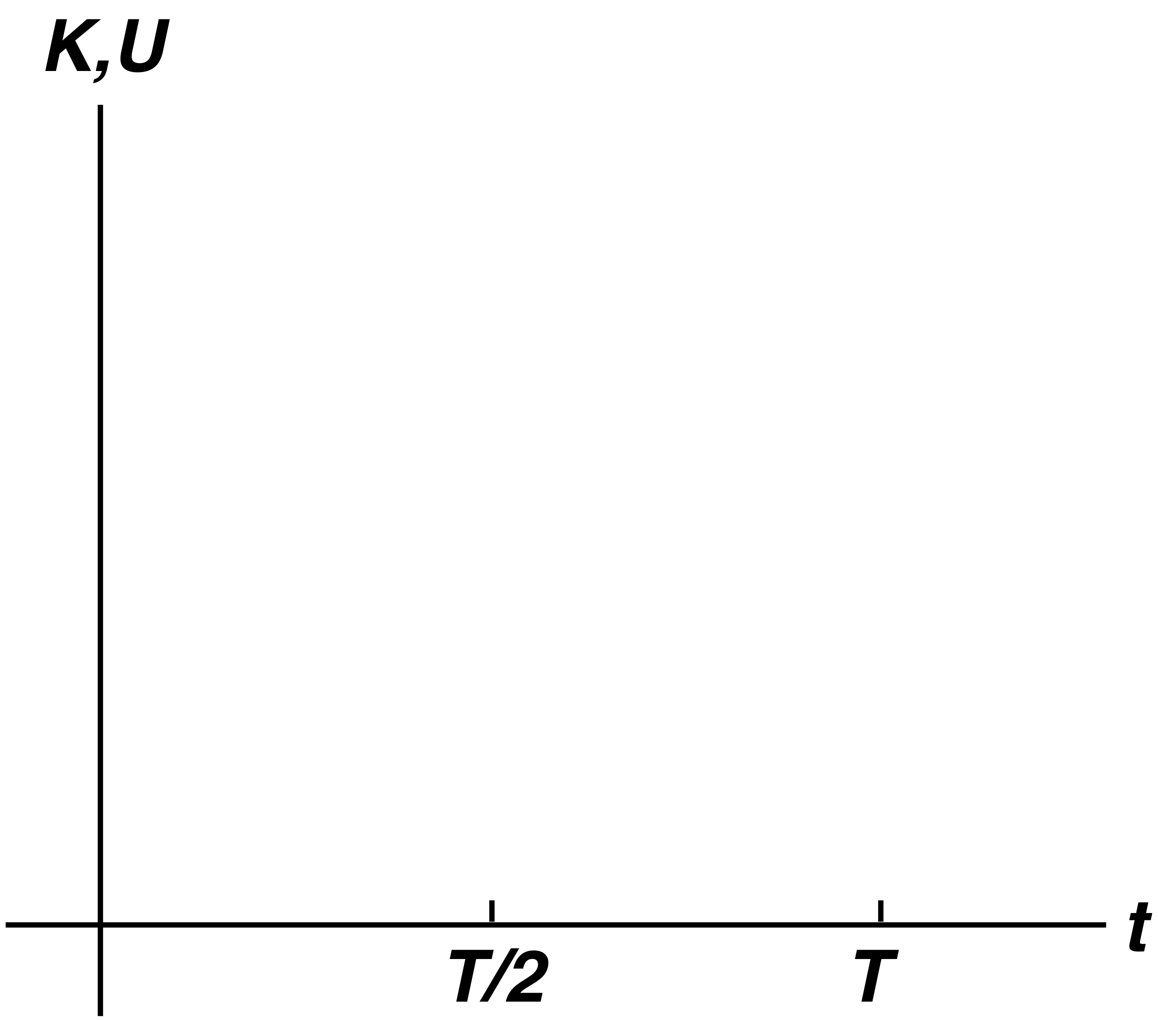
- พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่า

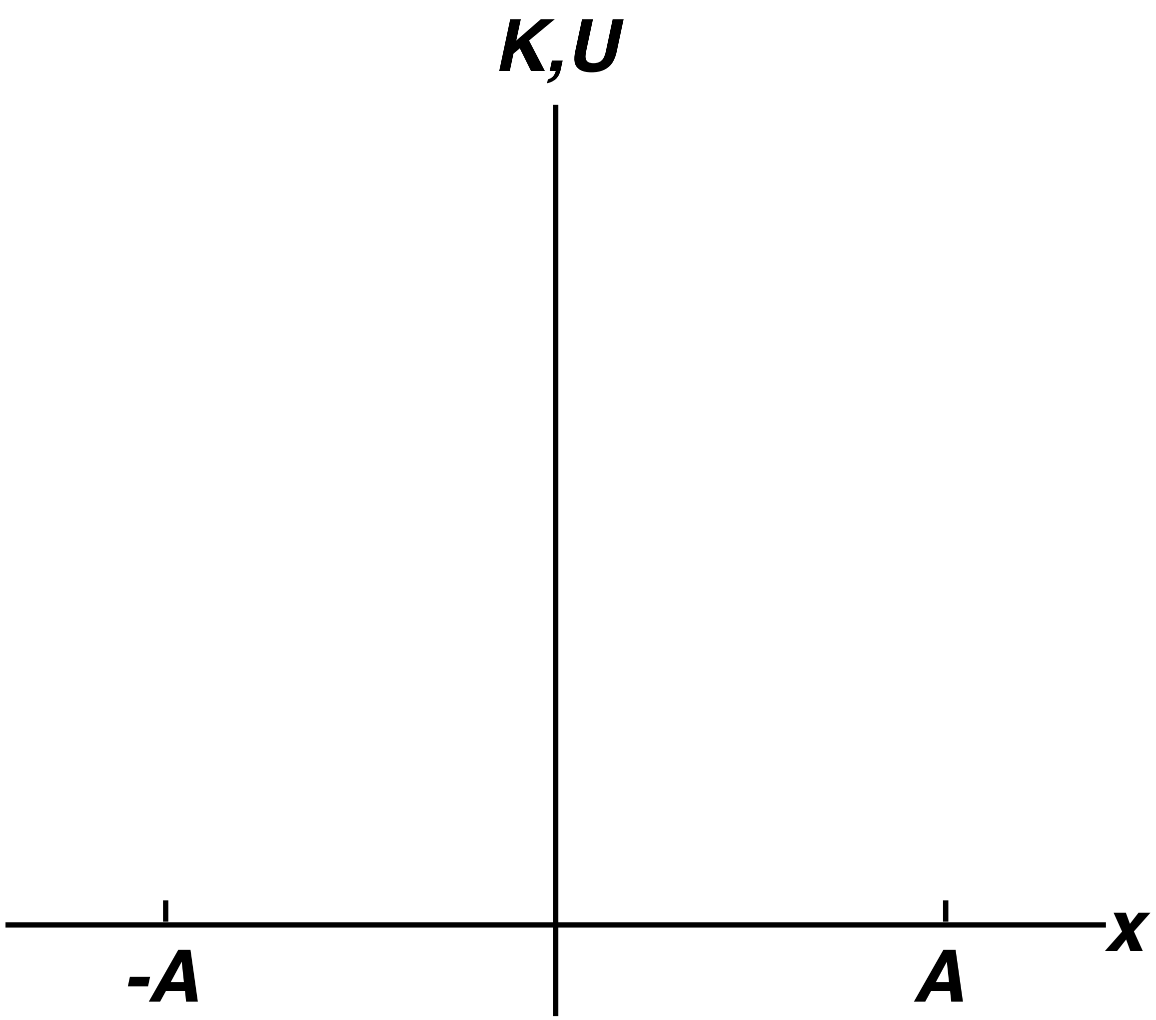
Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

- พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่าคงตัว
  - พลังงานจลน์
  - พลังงานศักย์
  - พลังงานกล = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์

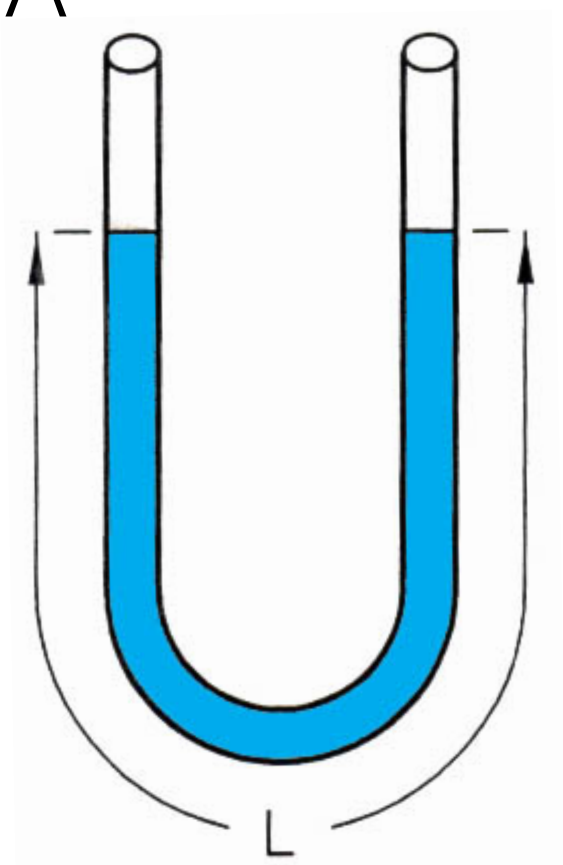
Energy

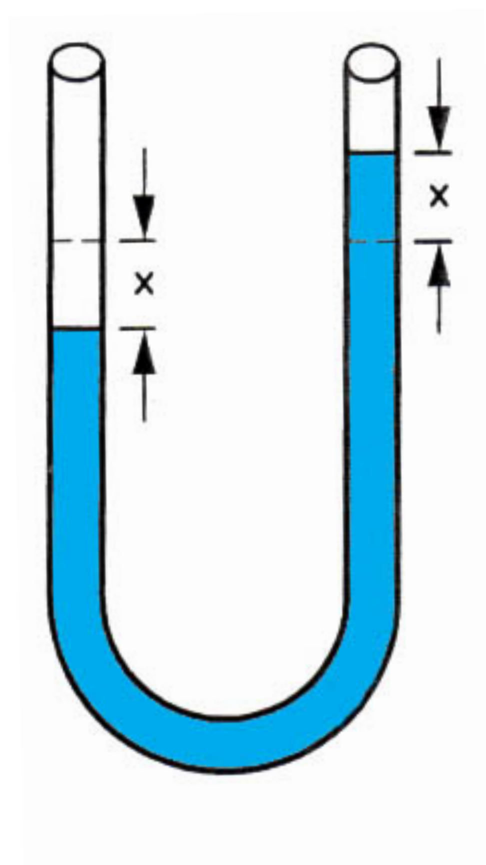




Example 3

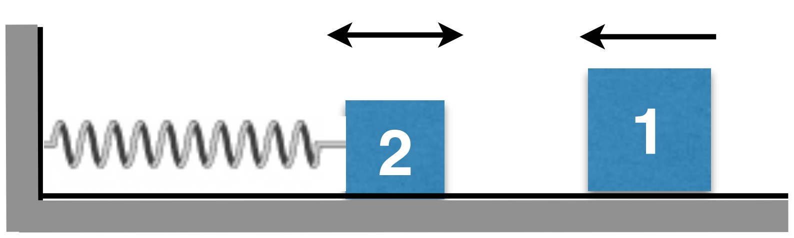
จงหาสมการบรรยายถึง SHM และค่าความถี่เชิงมุมของระบบท่อน้ำปลายเปิดรูปตัว U ที่เกิดการสั่น โดยไม่คิดถึงแรงเสียดทานภายในท่อ ให้น้ำมีมวล M ความหนาแน่น ρ และท่อปลายเปิดมีภาคตัดขวาง A





Example 4

กล่องหมายเลข 2 มีมวล 2.0 kg ติดอยู่ที่ปลายสปริงดังรูป กำลังเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีคาบเป็น 20 ms และกำหนดให้ตำแหน่งของกล่องเป็นไปตามสมการ



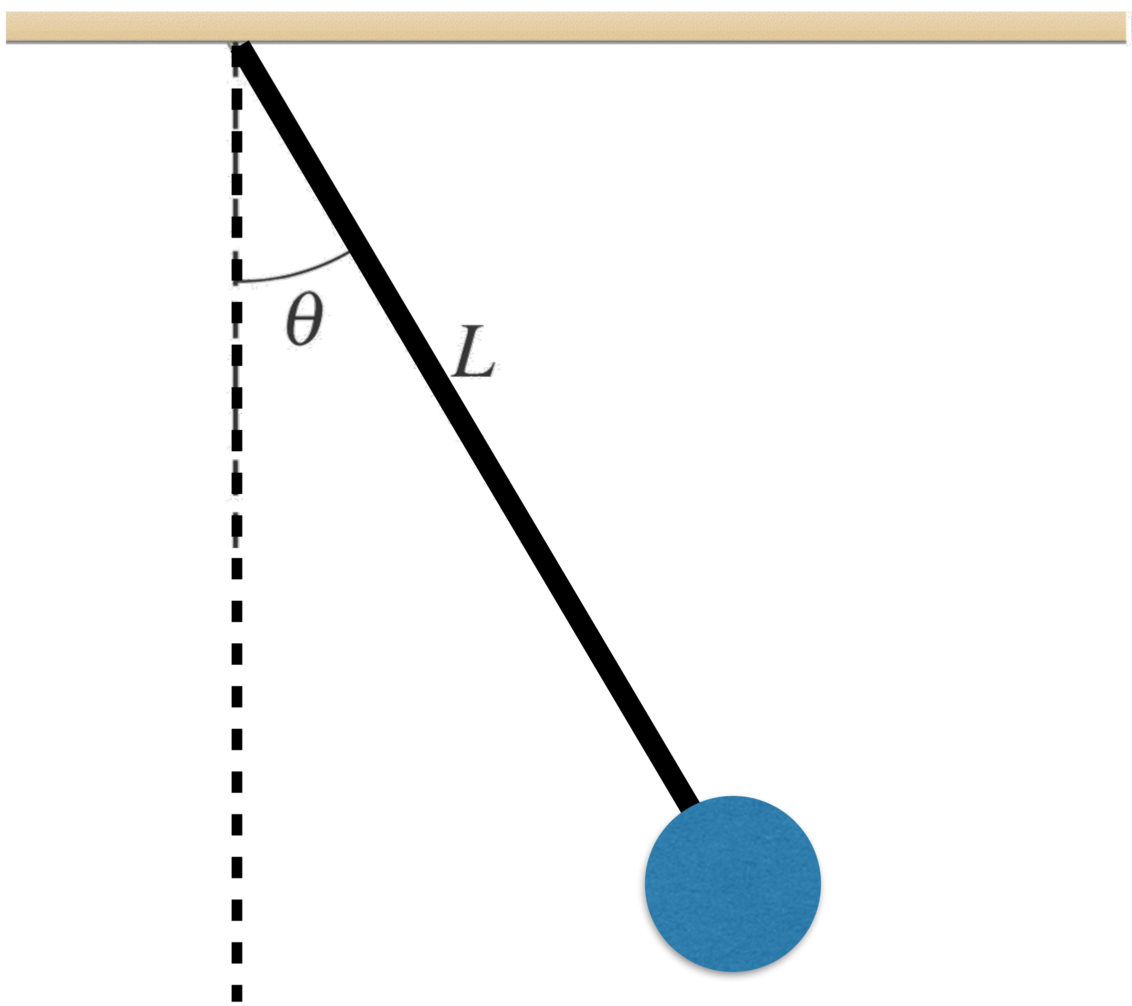
$$x(t) = (1.0\,\mathrm{cm})\cos(\omega t + \pi/2)$$

กล่องหมายเลข 1 มีมวล 4 kg ไถลเข้าหากล่องหมายเลข 2 ด้วยอัตราเร็วคงที่ 6.0 m/s ในทิศทางขนานกับความยาวของสปริง กล่องทั้งสองจะชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ที่เวลา 5 ms โดยหลังชนกล่องทั้งสองจะติดกันไป (ให้ถือว่าช่วงเวลาที่เกิดการชนน้อยกว่าคาบของการสั่นมาก ๆ) จงหา Amplitude ของการเคลื่อนที่แบบ SHM ภายหลังการชน

Example 4

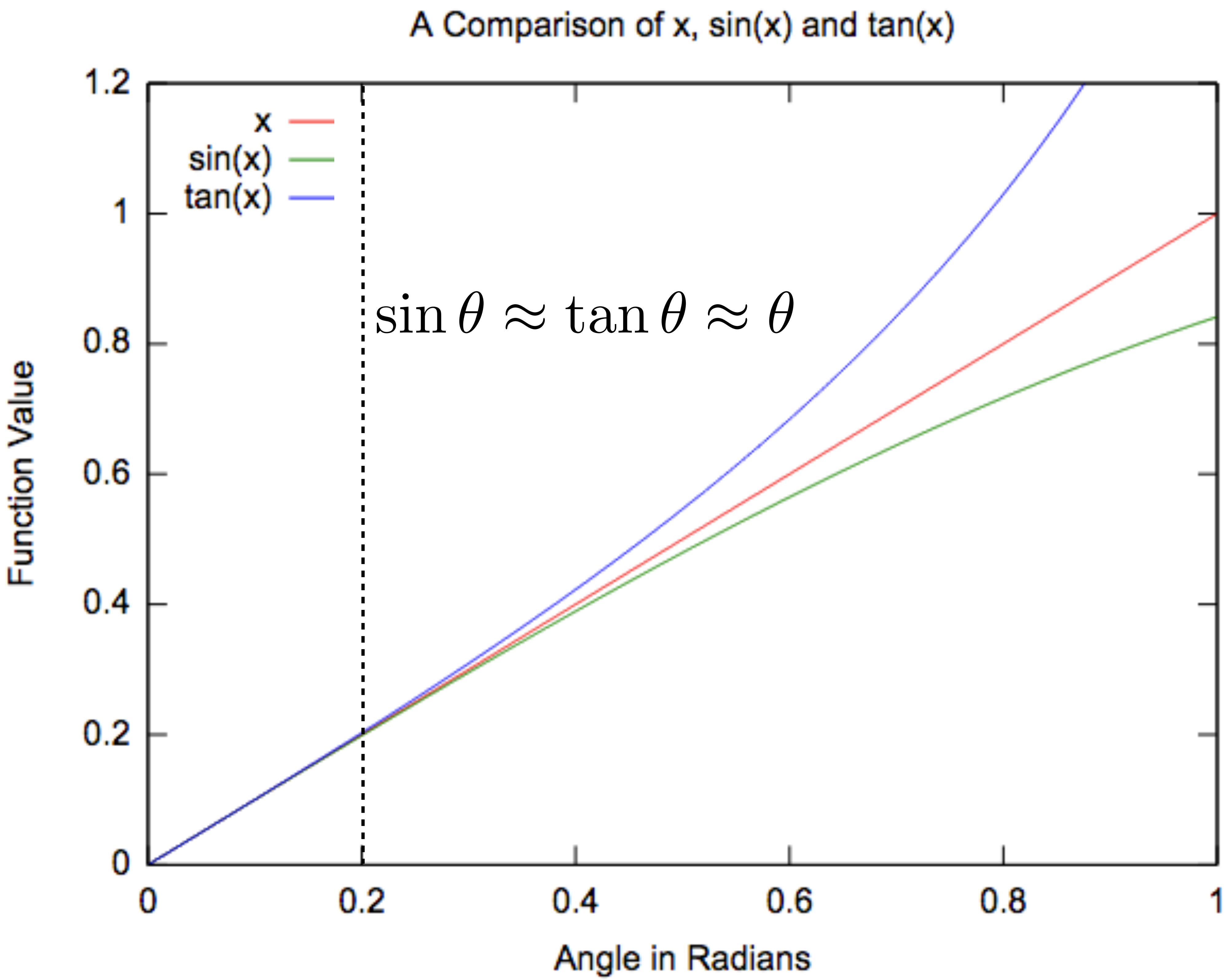
Simple pendulum

แบบจำลองในอุดมคติของก้อนมวลที่แขวนไว้กับเชือกไร้มวลที่ไม่ยืด



- แรง เป็นแรงที่ทำให้มวลเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมเท่านั้น
- แรงคืนตัวเกิดจาก
- ในกรณีทั่ว ๆ ไป การเคลื่อนที่แบบนี้ไม่ได้เป็น SHM เพราะว่า
  - ➡
  - ➡

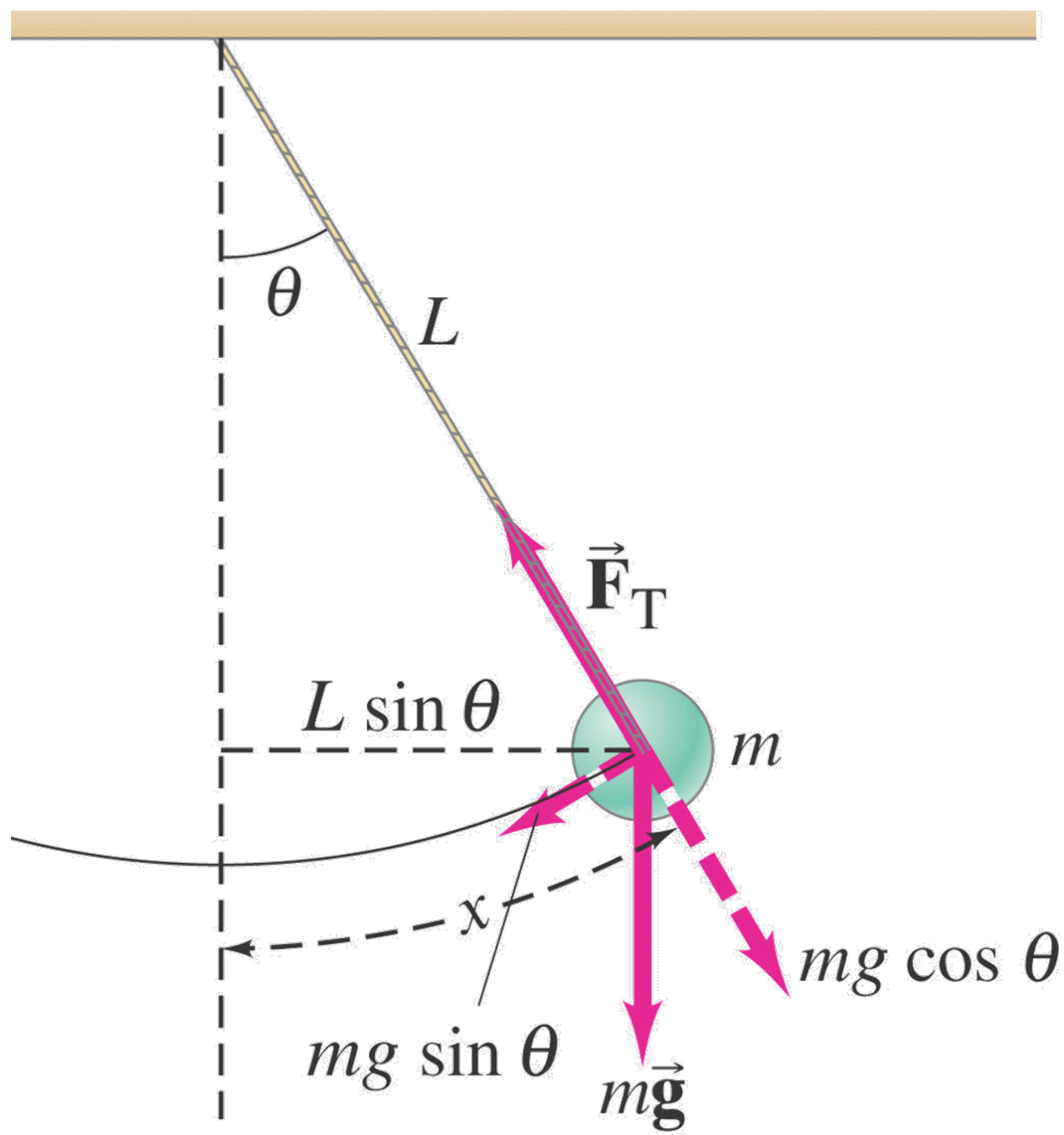
Small-angle approximation



http://en.wikipedia.org/wiki/Small-angle_approximation

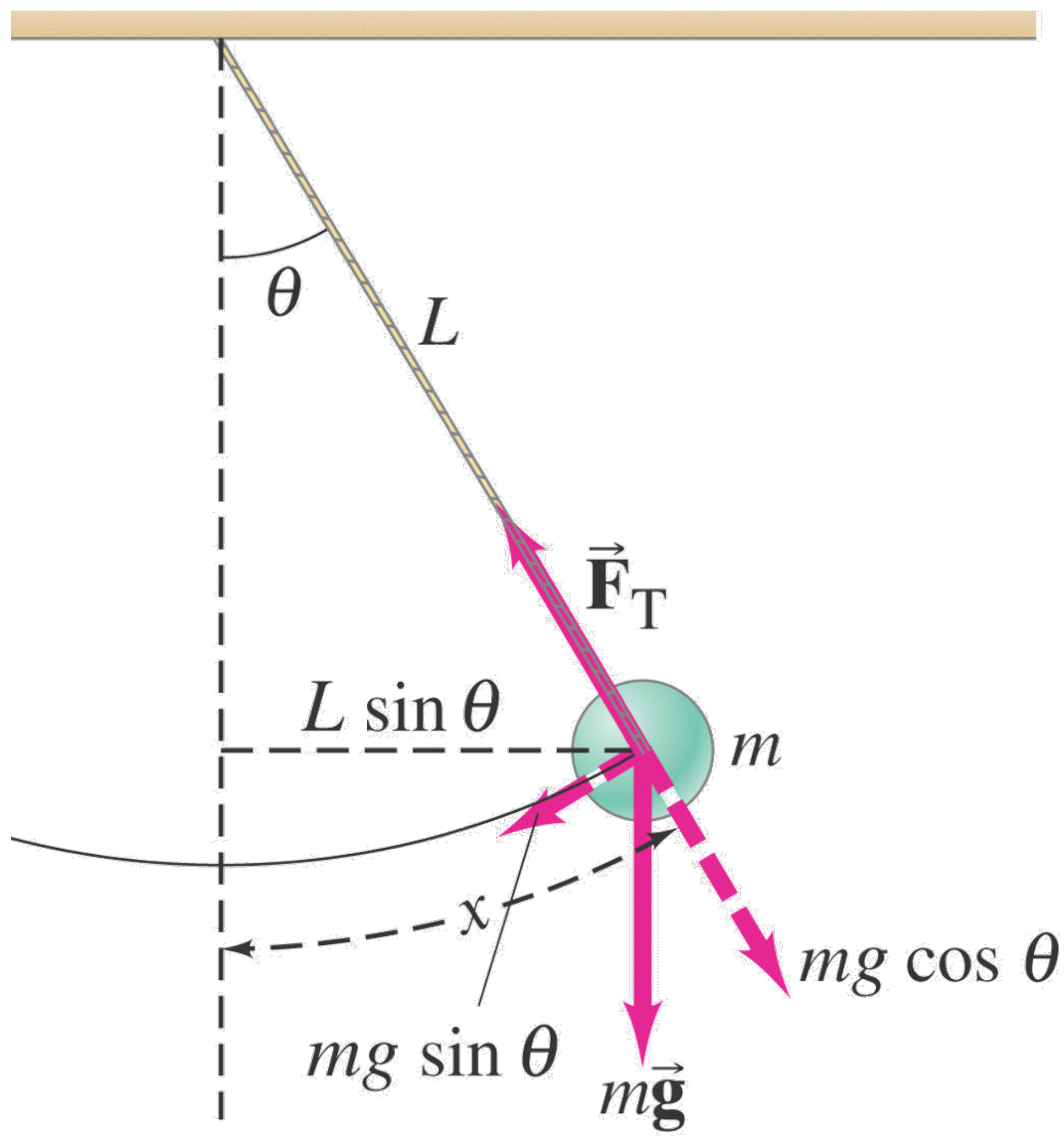
Simple pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ ($x \approx L\theta$) การแกว่งจะเป็น SHM



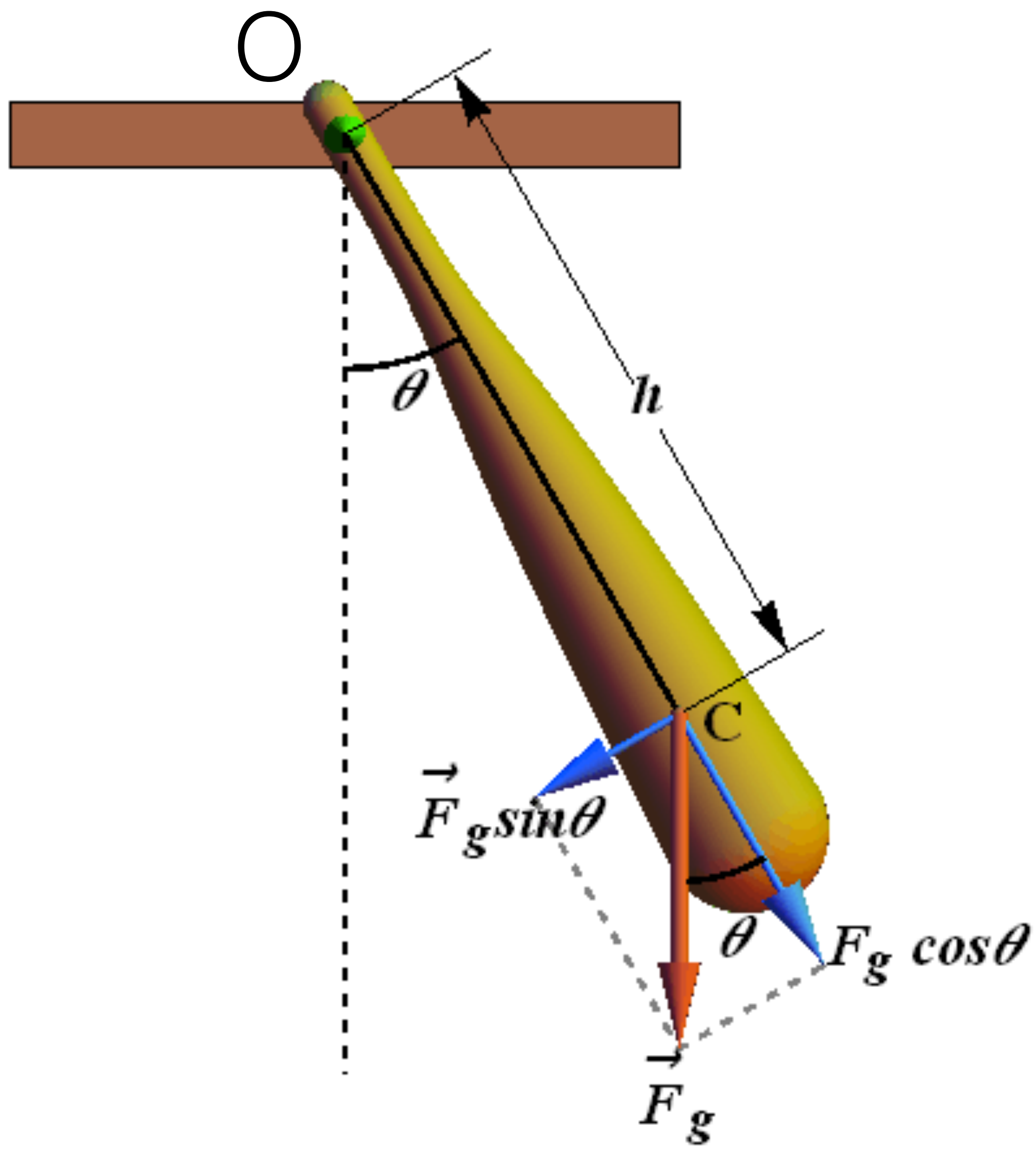
Simple pendulum

ลองพิจารณาจากหลักการคงที่ของพลังงาน



Physical pendulum

เป็นการแกว่งของวัตถุที่มีขนาดจำกัด โดยเราจะพิจารณาทอร์คคืนตัว โดย ในรูปเป็นการแกว่งของไม้เบสบอลรอบแนวแกนที่พุ่งออกจากกระดาษ (แทนด้วยแกน Z) ผ่านจุด O โดยมี C เป็นจุดศูนย์กลางมวล



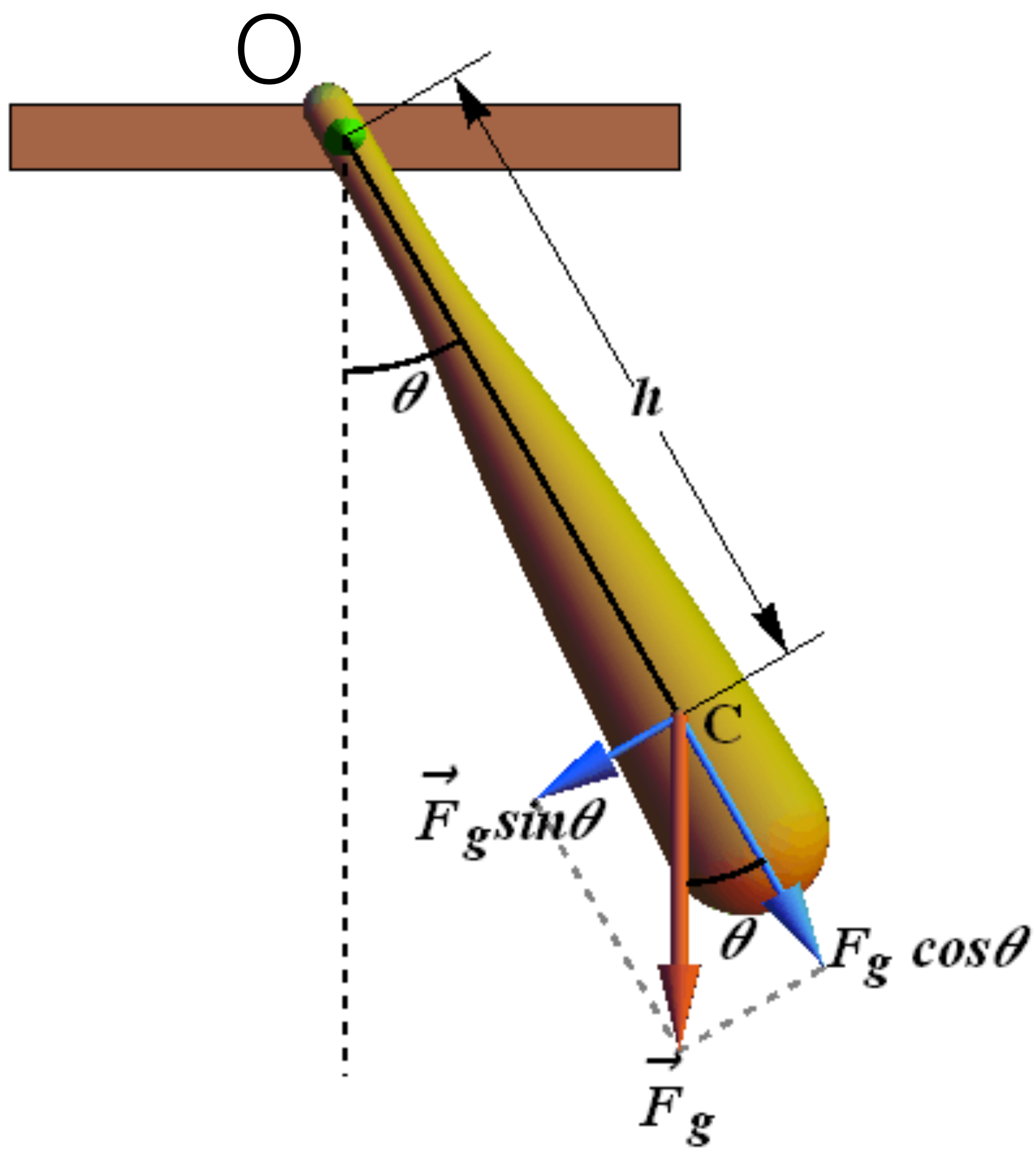
- h = ระยะจากจุดหมุน O ถึง C
- ทอร์กตามแนวแกน Z หาได้จาก

- ถ้า ให้ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุเกร็ง จาก

$$\tau_O =$$

Physical pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$

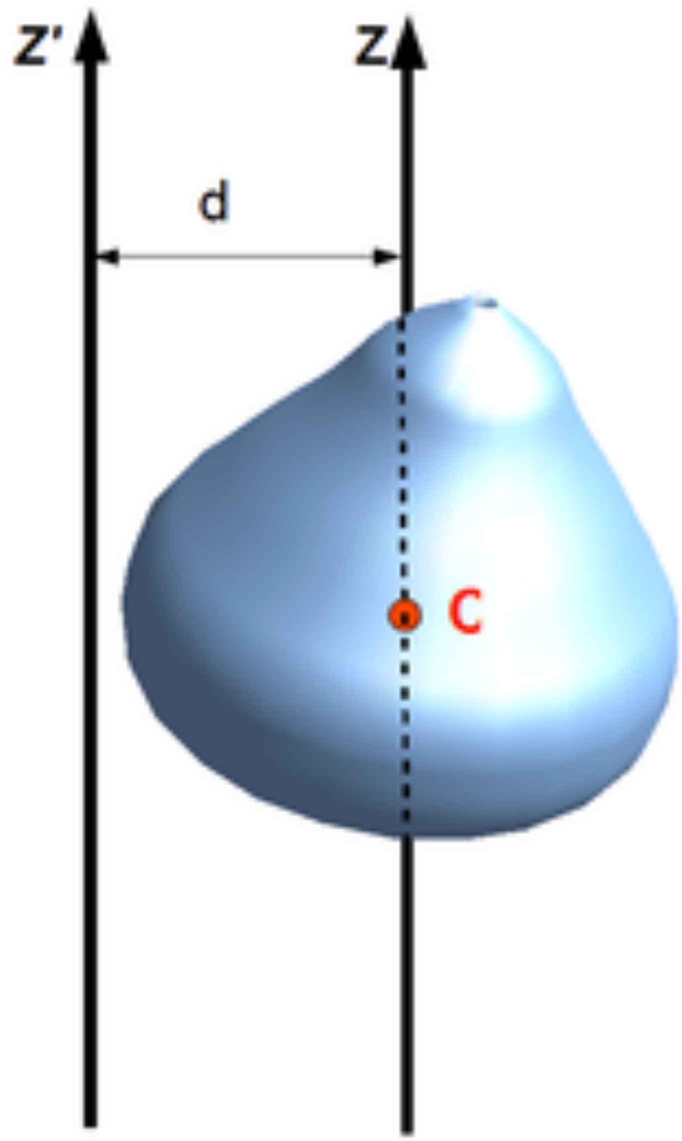


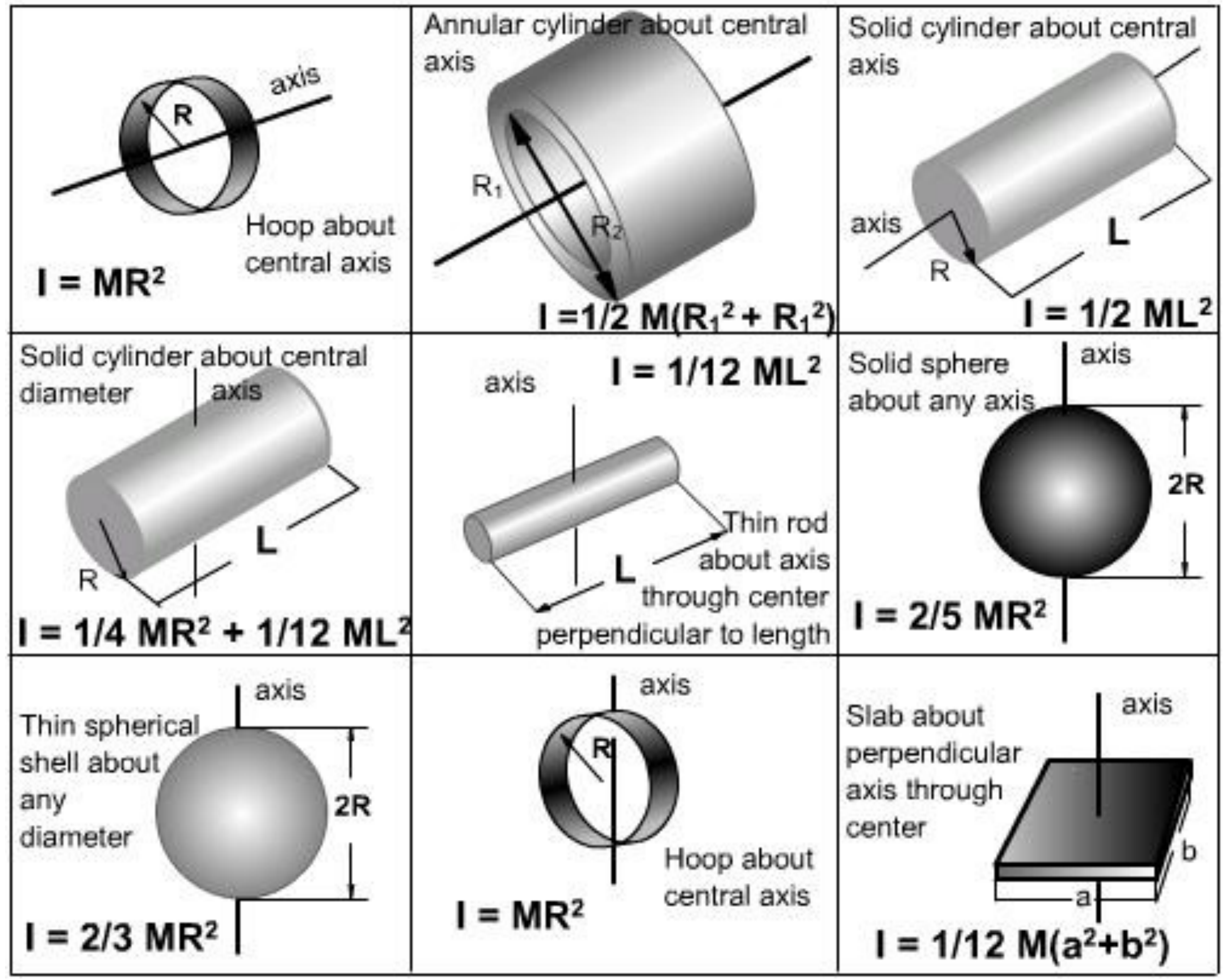
ความถี่เชิงมุม $\omega =$

คาบ $T =$

Moment of inertia

Parallel axis theorem

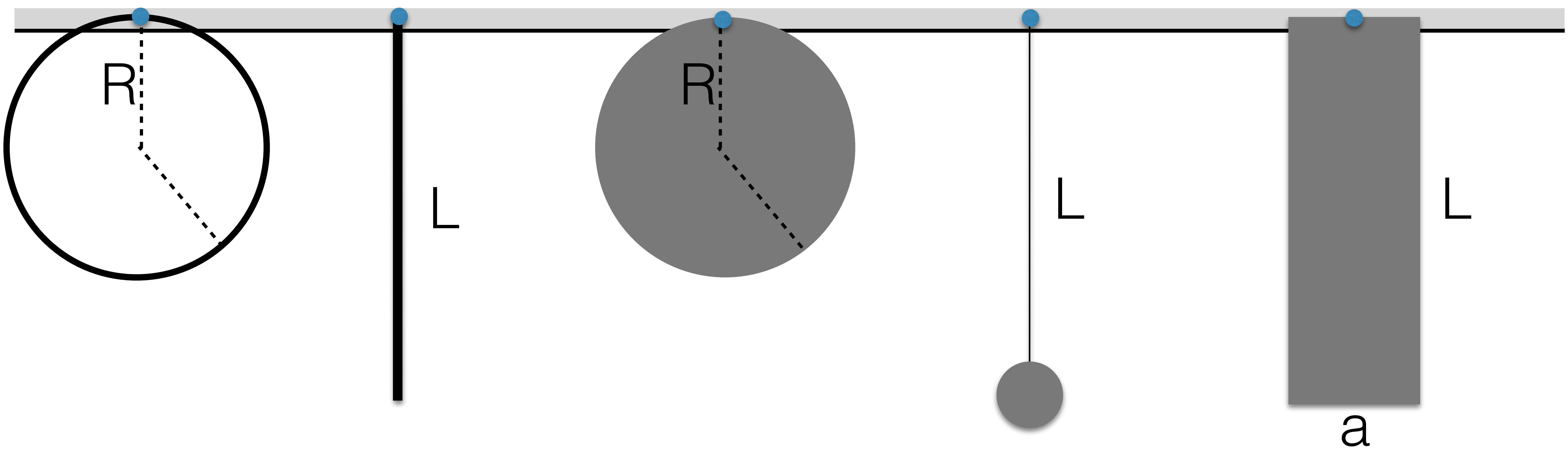




$$I_{z'} = I_{cm} + Md^2$$

Example 5

จงหาคาบของการแกว่งของระบบต่อไปนี้ และสรุปว่าคาบของการแกว่งขึ้นอยู่กับมวลหรือไม่ ให้การหมุนนี้อยู่ในแนวกระดาษ แกนของการหมุนคือทิศที่พุ่งออกจากกระดาษ

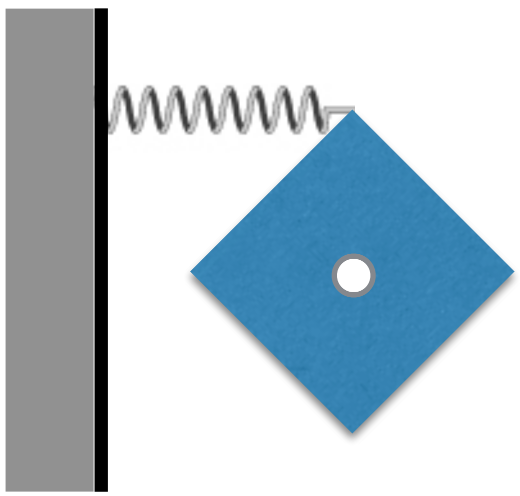


เปรียบเทียบขนาดของวัตถุ ถ้าต้องการให้วัตถุทุกชิ้นมีคาบเท่ากัน

Example 5

Example 5

Example 6

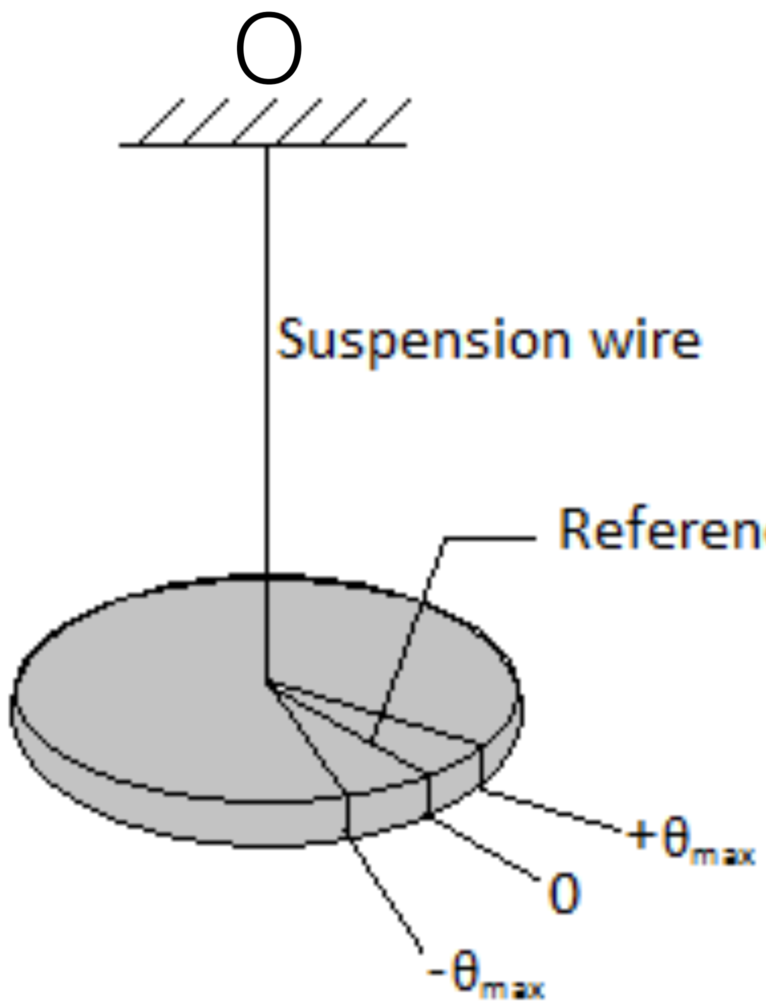


กล่องลูกบาศก์มวล 3.0 kg แต่ละด้านยาวด้านละ 6 cm โดยติดอยู่กับแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของมัน ดังรูป ที่มุมด้านบนของกล่องมีสปริง ที่มีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 1200 N/m เชื่อมอยู่โดยยึดติดกับผนัง ในตอนแรกสปริงไม่มีการยืดหรือกดตัว ถ้าเราหมุนกล้องเป็นมุม 3 องศา แล้วปล่อยให้แกว่งแบบ SHM จงคำนวณหาคาบของการแกว่ง

Example 6

Torsion pendulum

พิจารณาจานหมุน



Torsion constant

$$\tau_o = -\kappa\theta = I\alpha$$

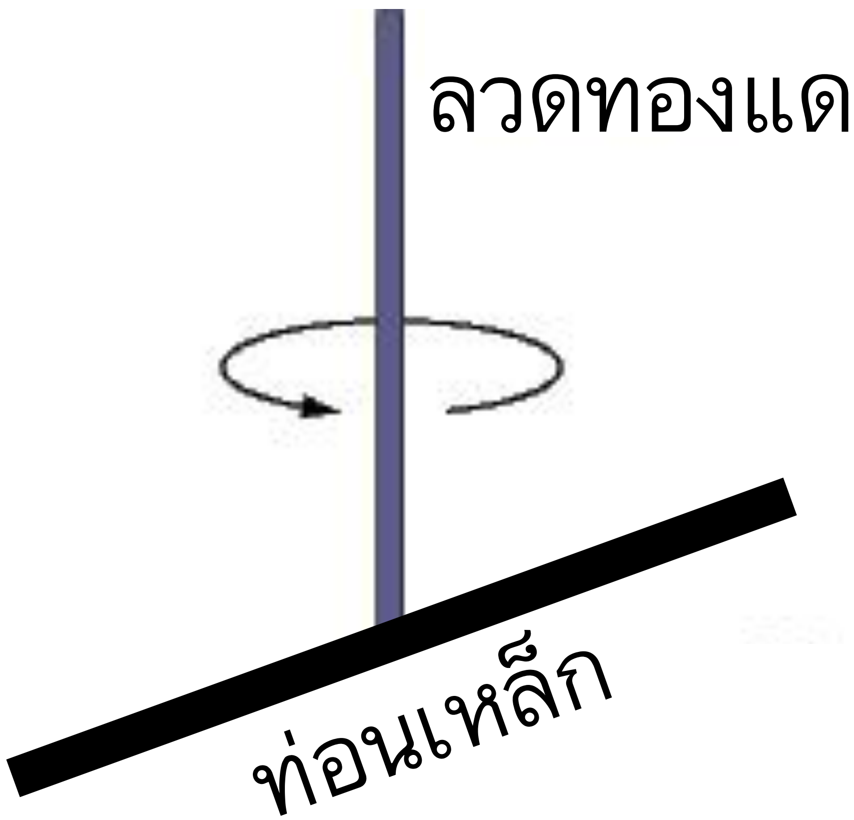
$$= -\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta = 0}$$ ← **SHM**

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

Example 7



ลวดทองแดงเส้นหนึ่ง ปลายด้านหนึ่งผูกไว้กับเพดาน ปลายอีกด้านหนึ่งผูกไว้ตรงกลางท่อนเหล็กที่มีมวล 100g ความยาว 20 cm เมื่อบิดลวดทองแดงไปเล็กน้อยและปล่อย ปรากฏว่าท่อนเล็กเกิดการแกว่งรอบลวดทองแดงด้วยคาบ 10 วินาที จงหา Torsion constant โดยสมมติว่าโมเมนต์ความเฉื่อยของลวดทองแดงเมื่อเทียบกับแกนหมุดมีค่าน้อยกว่าโมเมนต์ความเฉื่อยของท่อนเหล็กมาก ๆ

Example 7

Linear differential equation

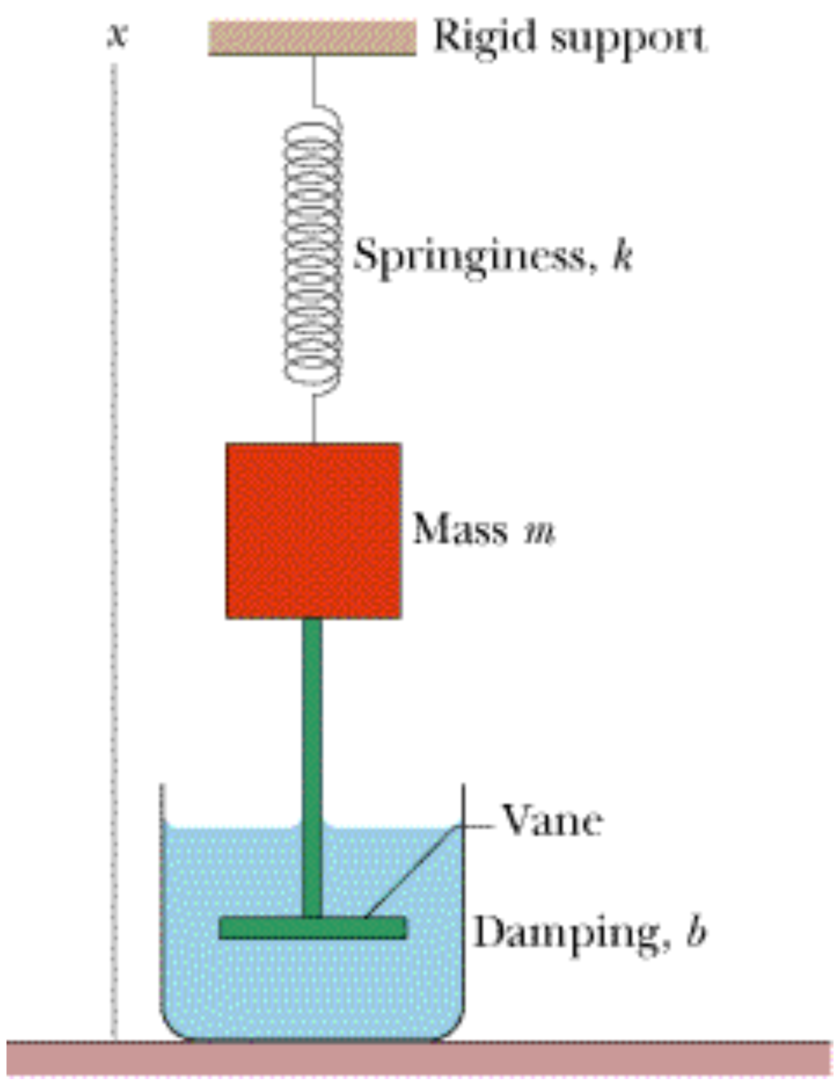
"Linear differential equations are differential equations having solutions which can be <u>added together</u> in particular linear combinations to form further solutions."

Linear differential equation

Linear differential equation

Damped oscillations

พิจารณาในสถานการณ์ที่สมจริงมากยิ่งขึ้น โดยมีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน หรือแรงต้านอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง การแกว่งที่เกิดขึ้นจะถูกหน่วง



http://www.webassign.net/hrw/hrw7_15-15.gif

พิจารณาเฉพาะแนวแกน x ตามรูป

Damping force

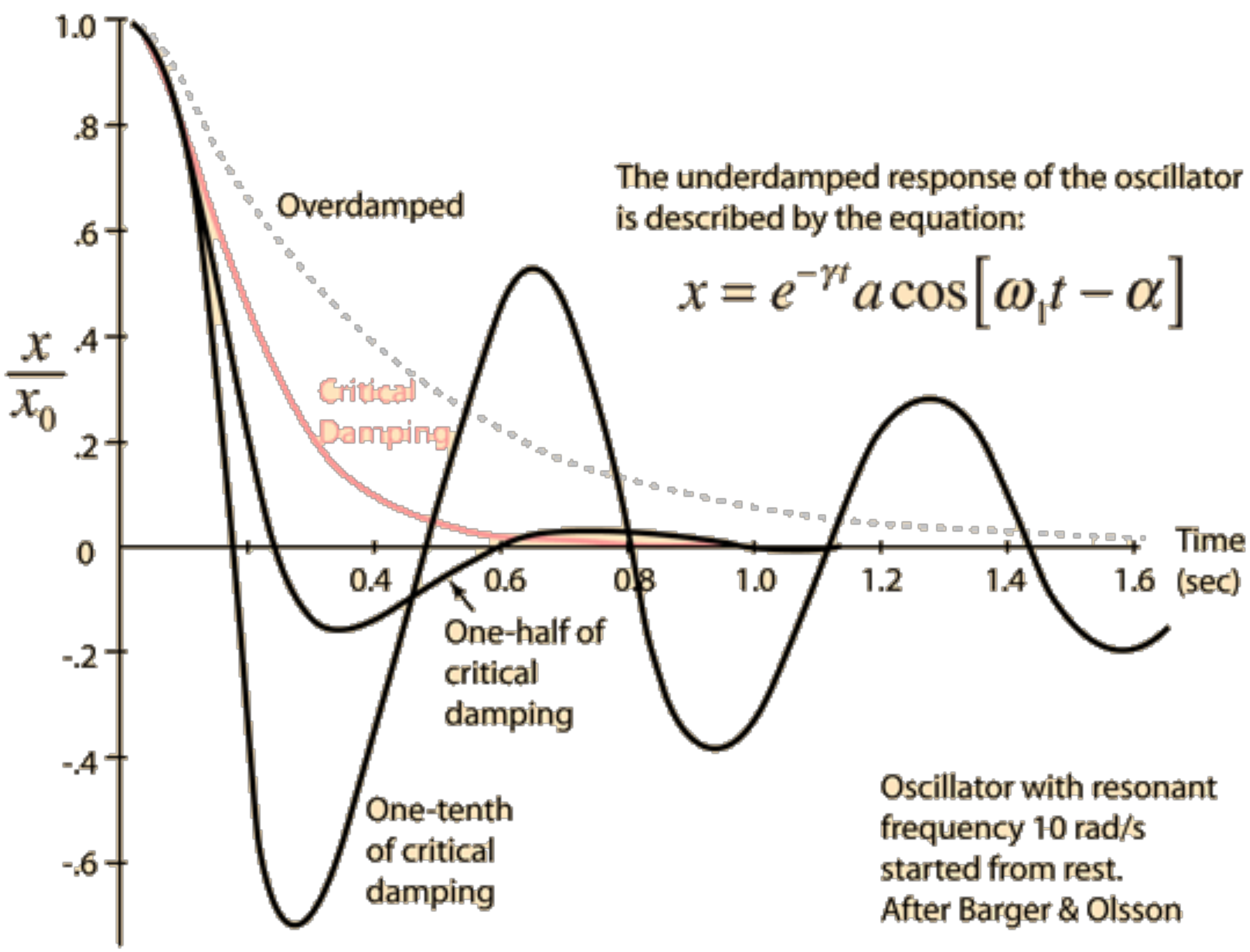
$$F_d = -b\nu \qquad F_s = -kx$$

Damping constant

แรงที่กระทำต่อมวล m (พิจารณาว่าผลของแรงโน้มมีน้อยมากเมื่อเทียบกับ F_d และ F_s)

ค่าคงที่ของความหน่วง $\gamma = b/2m$

Damped oscillations



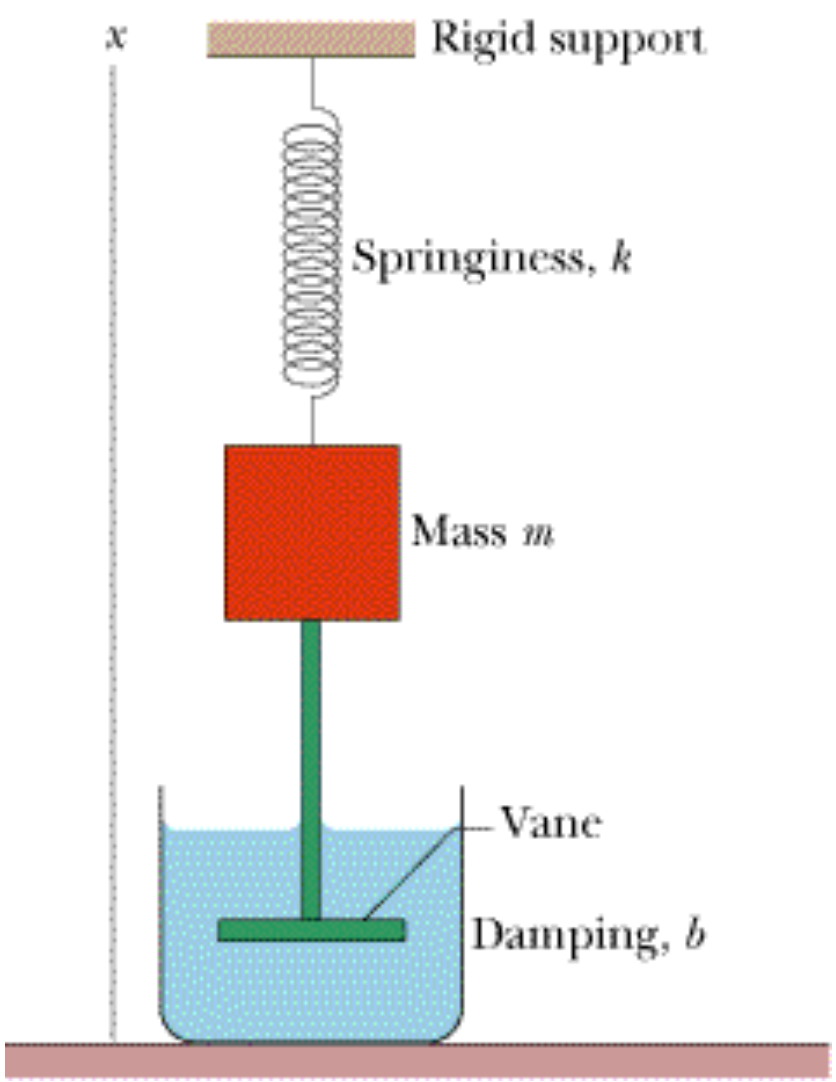
Overdamped

Critical damping

Underdumped

http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/oscda.html#c1

Underdamped oscillations



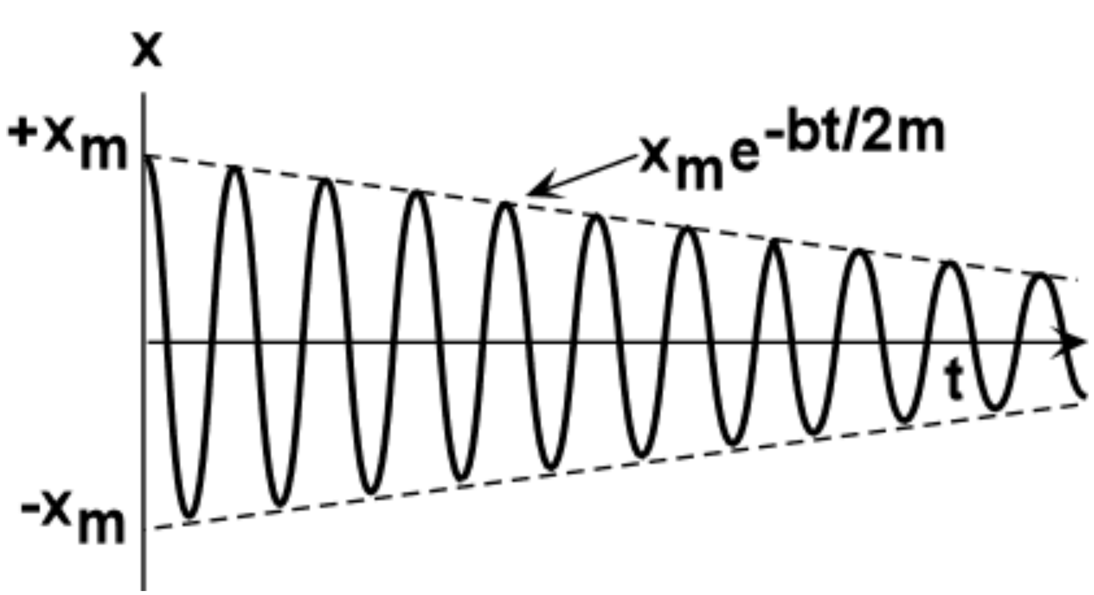
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

คำตอบของสมการจะได้ว่า

และค่าความถี่เชิงมุมมีค่าเป็น

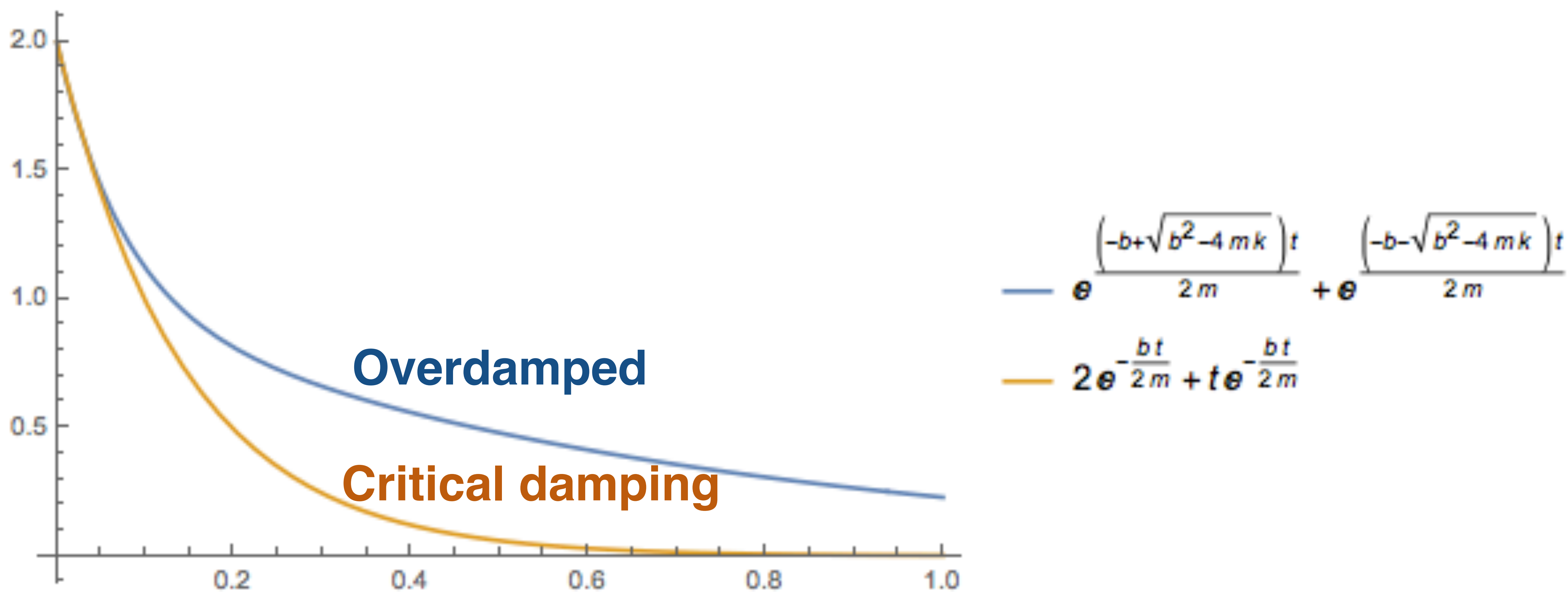
มีจุดที่น่าสังเกต 2 อย่างคือ

-
-

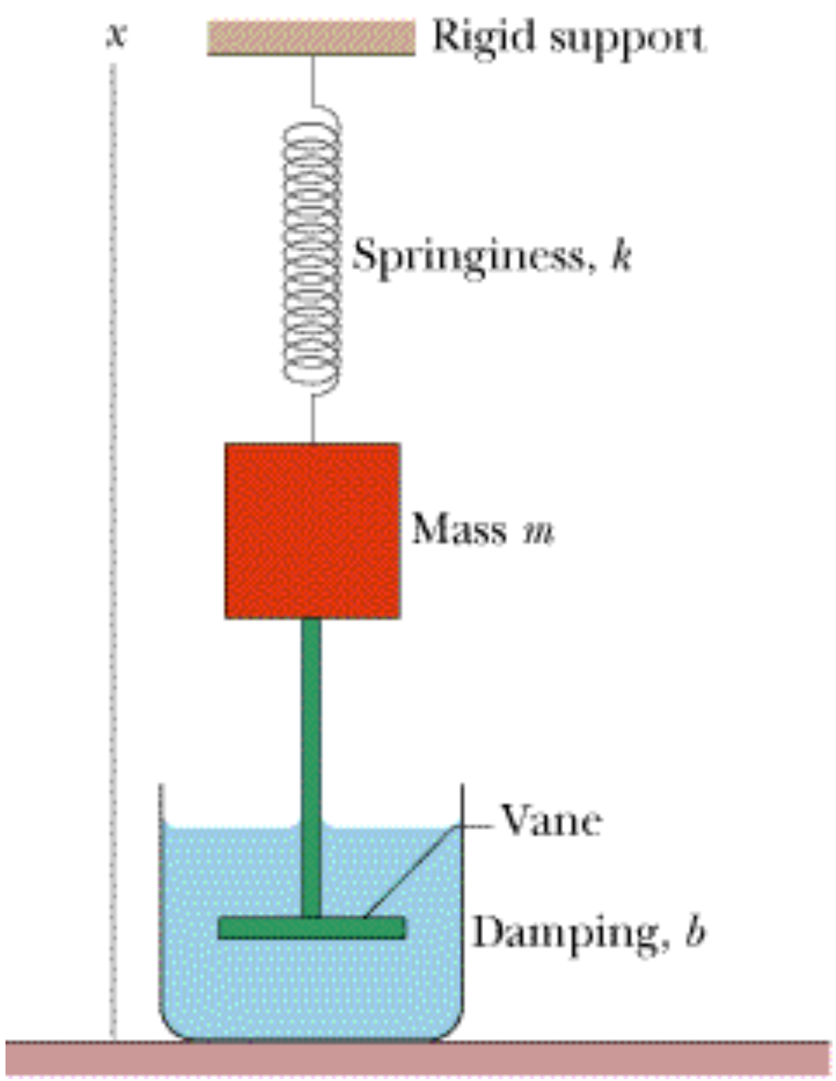


Overdamped - Critical damping

- ในกรณีของ critical damping เราจะสังเกตได้ว่า ในขณะนี้เรามี solution เดียวคือ
- หา 2nd solution โดยใช้วิธี Method of reduction of order (รอเรียนใน Calculus) เราจะได้ solution ออกมาในรูป



Example 8



พิจารณาจากระบบตามรูป ให้ m = 250 g, k = 85 N/m, และ b = 70 g/s จงคำนวณหา

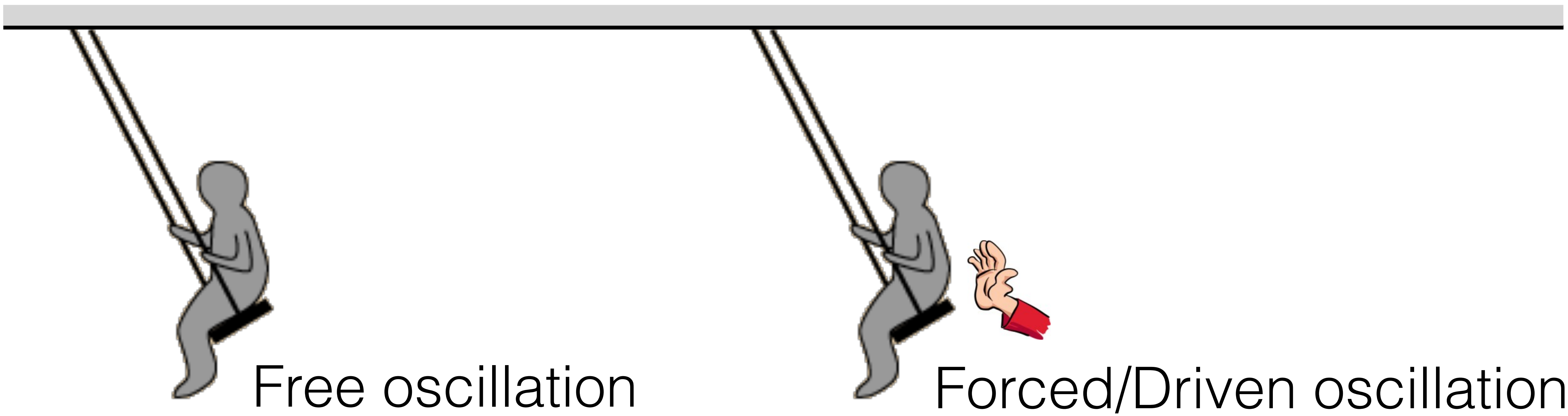
(ก) คาบของการเคลื่อนที่

(ข) ระยะเวลาเท่าใดที่ค่า Amplitude ของการเคลื่อนที่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น

(ค) ระยะเวลาเท่าใดที่พลังงานกลของระบบลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น

Example 8

Forced oscillations and resonance



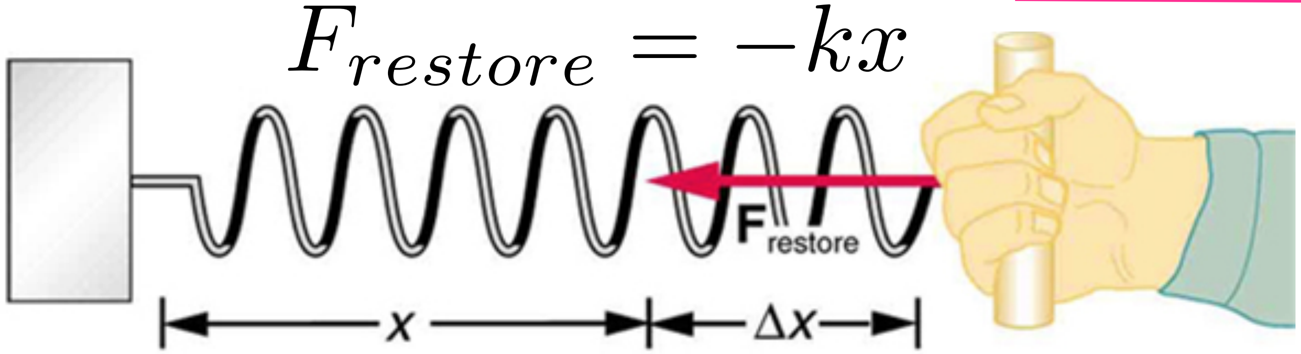
ในกรณีของ Forced oscillation นั้นเรามีความถี่เชิงมุมที่เกี่ยวข้องกับระบบอยู่สองค่าคือ

- ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural angular frequency, ω_0) บอกถึงค่าความถี่เชิงมุมของระบบที่ถูกทำให้แกว่งจากการกระทำเพียงขณะหนึ่ง จากนั้นปล่อยให้แกว่งโดยอิสระ (สิ่งที่เรียนมาก่อนหน้า)
- Angular frequency ที่เกิดจากแรงขับ (Driving force), ω_d

Forced oscillations and resonance

$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$F_{restore} = -kx$$



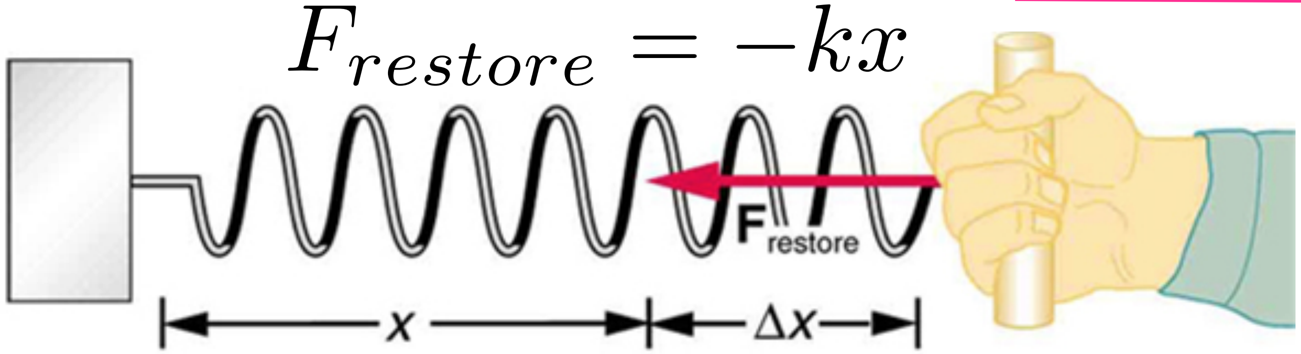
พิจารณาเมื่อเวลาผ่านไปนาน พอสมควร ระบบจะสั่นด้วย ความถี่_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

http://philschatz.com/physics-book/resources/Figure_04_01_02.jpg

Forced oscillations and resonance

$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$F_{restore} = -kx$$

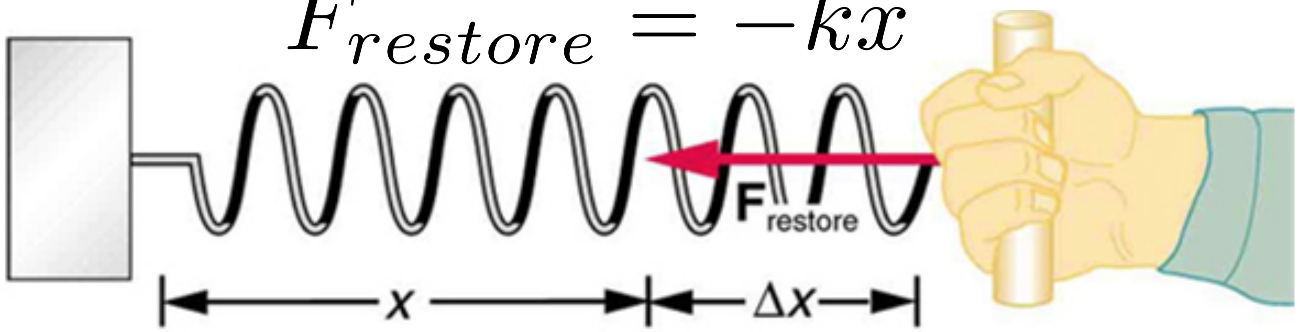


Forced oscillations and resonance

พิจารณาแรงต้านอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง

$$F_0 \cos \omega_d t$$

$$F_{restore} = -kx$$



$$F_{air} = -b\nu$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \omega_d t$$

คำตอบของสมการนี้ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

- Transient solution
- Steady solution

Forced oscillations and resonance

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_d t$$

Transient solution

Steady solution

$$x(t) = A_h e^{-bt/2m}\sin(\omega' t + \phi_h) + A\cos(\omega' t + \phi)$$

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}$$

Resonance จะเกิดเมื่อ A มีค่ามากที่สุด

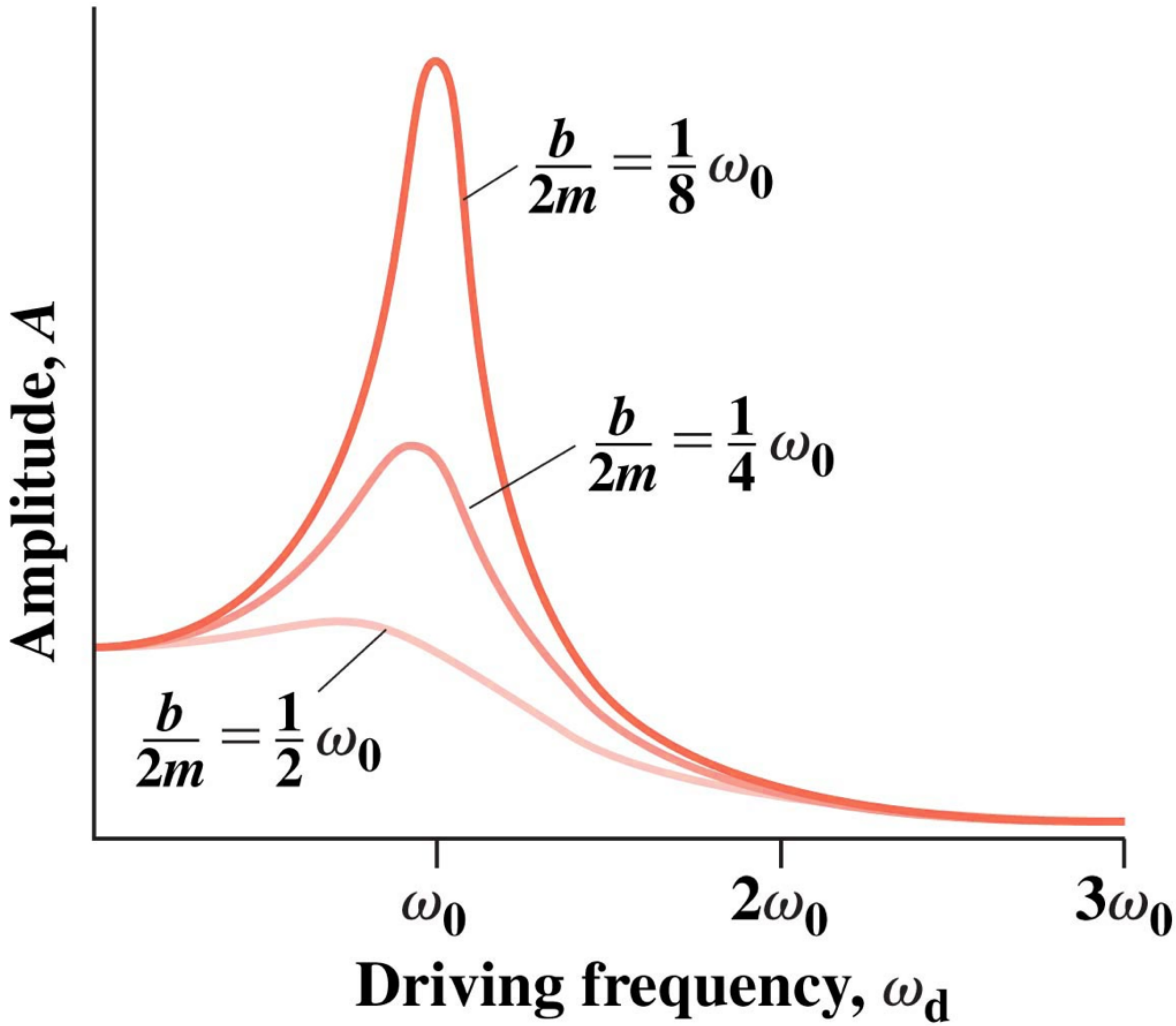
$$\frac{d}{d\omega_d}\left(\frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega_d^2}}\right) = 0$$

ได้ว่า $\omega_d = 0$ หรือ $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$

ไม่ใช่สิ่งที่เราสนใจ

Forced oscillations and resonance

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

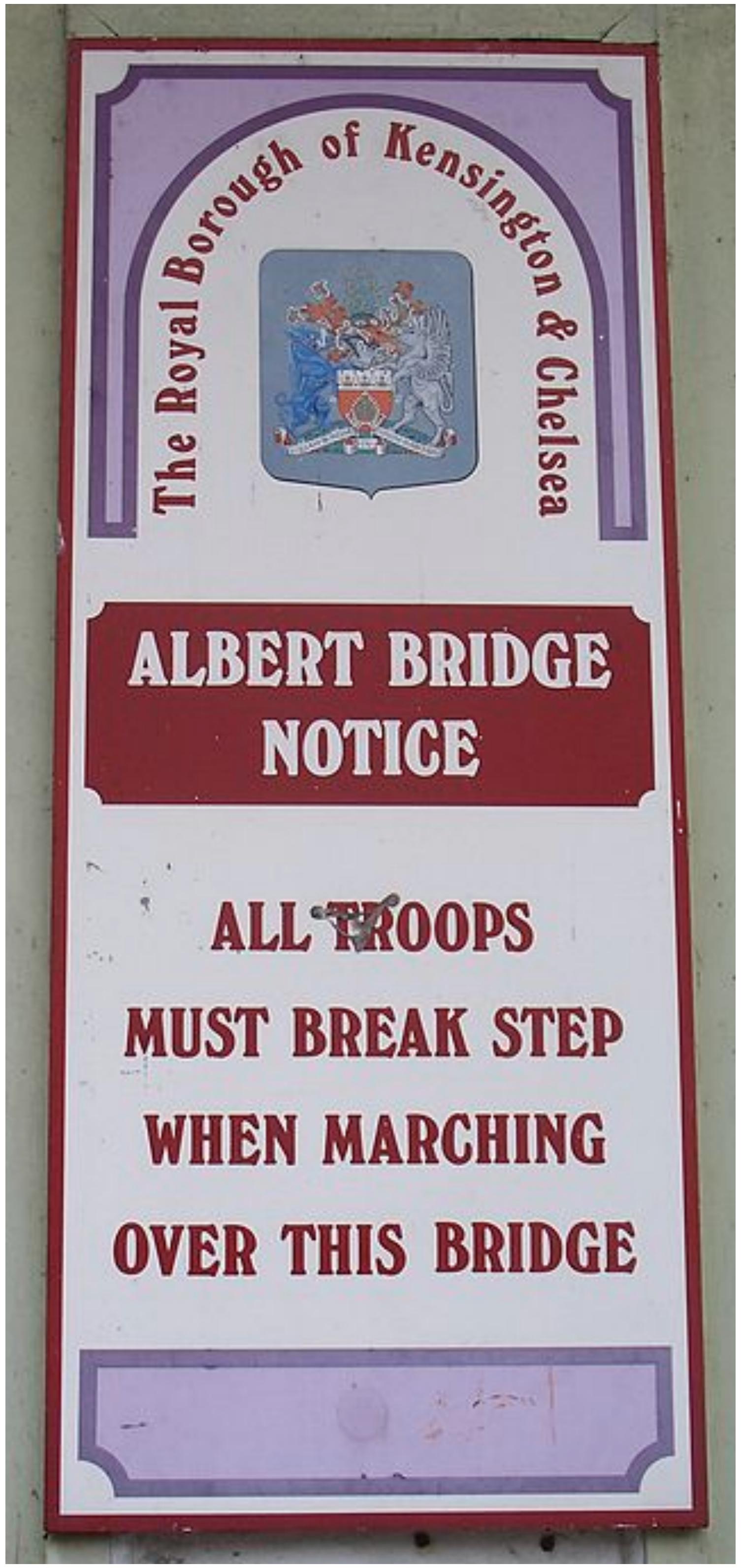


http://www.physics.louisville.edu/cldavis/phys298/notes/resonance_fig2.jpg

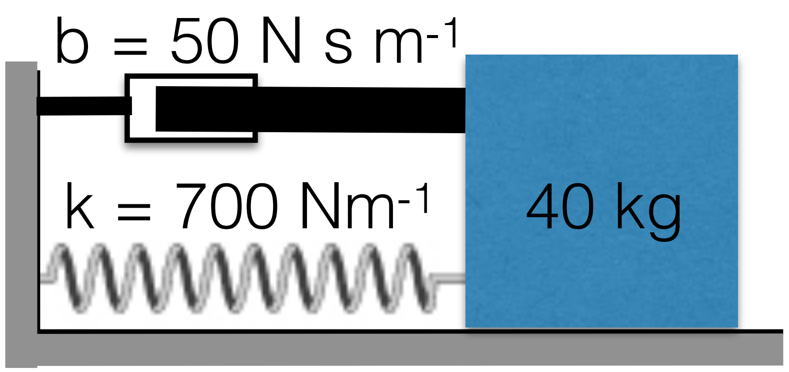
Forced oscillations and resonance

ในการก่อสร้างต่าง ๆ “resonance disaster” บรรยายถึงการถล่มของสิ่งก่อสร้างซึ่งเกิดจากการสั่นที่มีค่าเท่ากับค่าความถี่ธรรมชาติของสิ่งก่อสร้างนั้น ๆ

- Failure of the original Tacoma Narrows Bridge
- Collapse of Broughton Suspension Bridge (due to soldiers walking in step)
- Collapse of Angers Bridge
- Collapse of Königs Wusterhausen Central Tower
- Resonance of the Millennium Bridge
- Evacuation of the 39-story TechnoMart commercial-residential high-rise in Korea in 2011 due to a class performing Tae Bo exercises to the song "The Power".



Exercise 9



จากระบบดังรูป เมื่อเราไถลกล่องบนพื้นลื่นออกไปเป็นระยะทาง 20 ซม. แล้วปล่อย จงหาว่า

(1) จะเกิดการ damping แบบใด จงแสดงวิธีคำนวณ และหากเป็น Underdamping จะเกิดด้วยความถี่เท่าไหร่

(2) ถ้าต้องการภายหลังการปล่อยกล่อง กล่องกลับสู่จุดสมดุลเร็วที่สุดโดยไม่เกิดการสั่น จะต้องเปลี่ยนแปลงค่า damping constant เป็นเท่าใด