

Simple harmonic motion

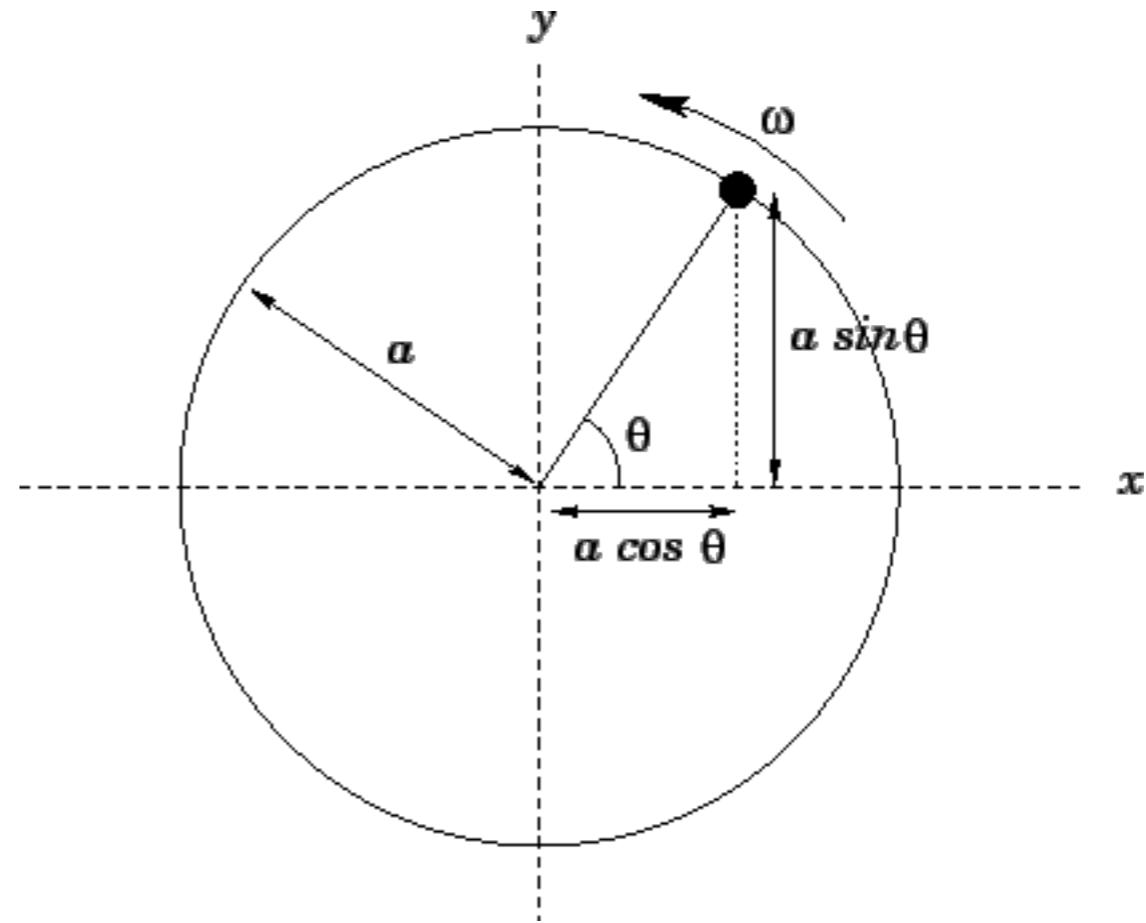
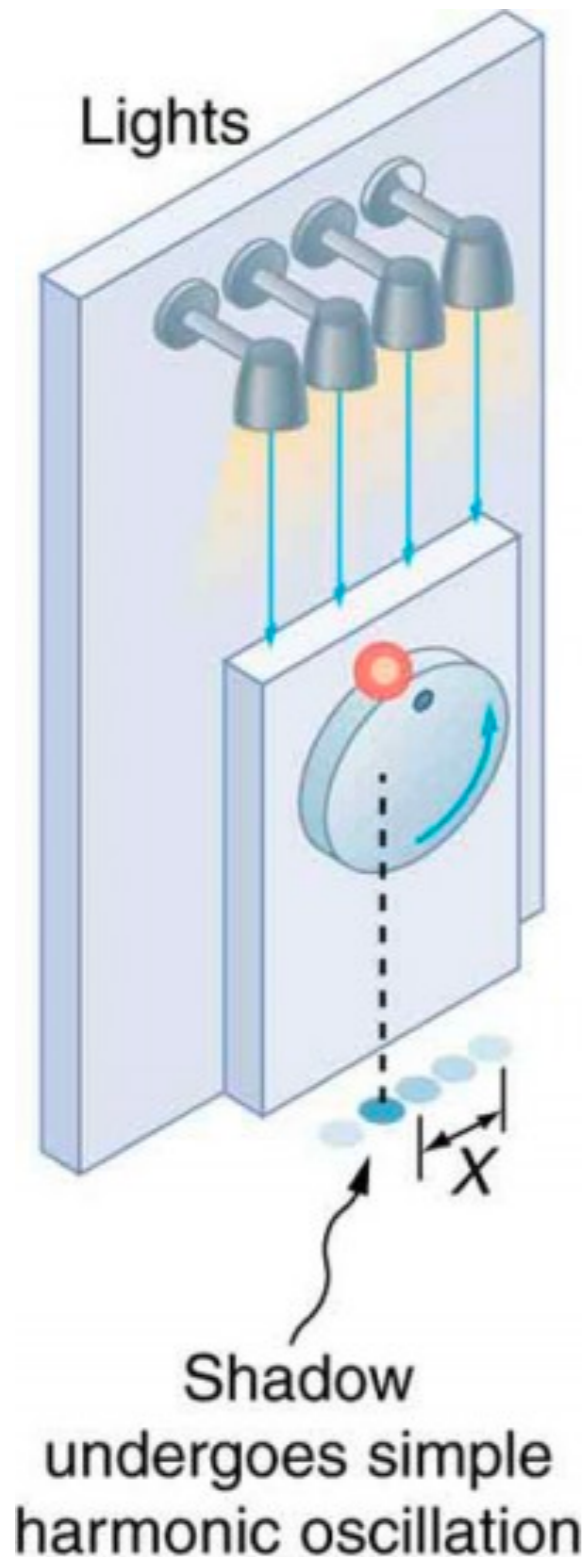
- Uniform circular motion
- Simple harmonic motion
 - Energy
- Simple pendulum
 - Small-angle approximation
- Physical pendulum
- Torsion pendulum
- Linear differential equation
(ไม่ออกข้อสอบ สำหรับคนที่ต้องการรู้เพิ่มเติม)
- Damped oscillations
- Forced oscillations and resonance



N. Srimanobhas (Norraphat.Srimanobhas@cern.ch)

<https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/Main/PhatSrimanobhasTeaching>

Uniform circular motion



$$x(t) =$$

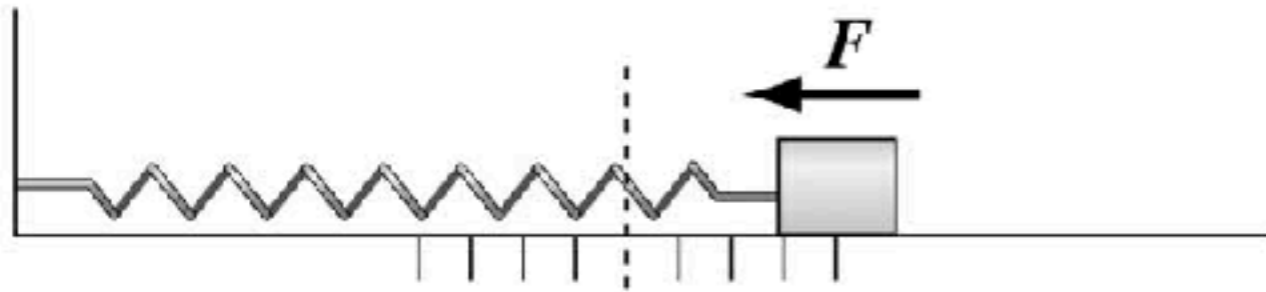
$$T = \quad , \quad f =$$

↑ ↑
คาบ (Period) ความถี่ (Frequency)

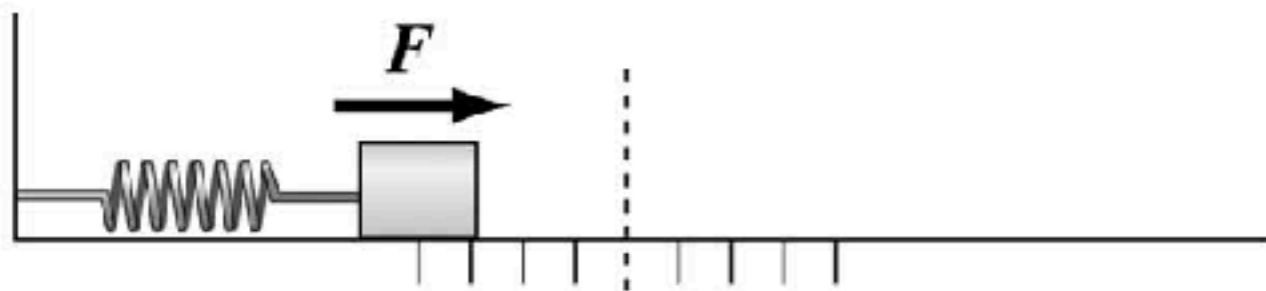
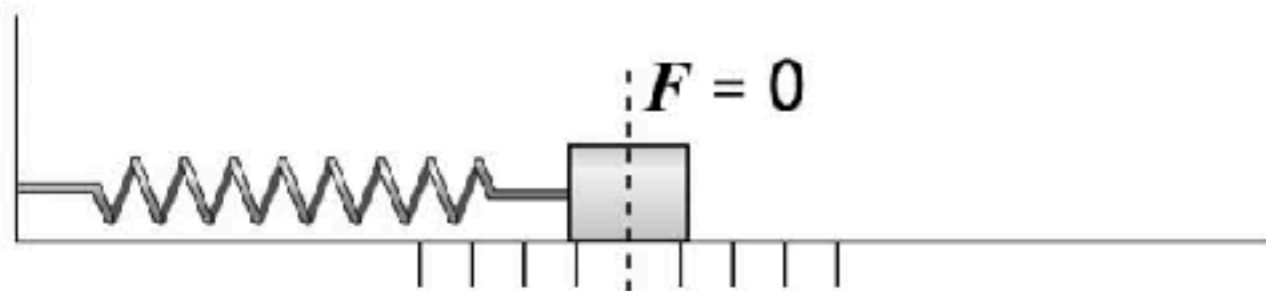
Simple harmonic motion

การเคลื่อนที่แบบ SHM เป็นรูปแบบหนึ่งของ periodic motion โดยมีเงื่อนไขคือ

- ▶ แรง (แรงคืนตัว) แปรผันตรงกับ
- ▶ แรงมีทิศทาง จุดสมดุล (equilibrium position) เสมอ
- ▶ แรงมีเครื่องหมาย การกระจัดเสมอ



$$F =$$



Credit: http://www.wikiupremed.com/mcat_course.php?code=010106

Simple harmonic motion: solution

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$x(t) =$$

$$v(t) =$$

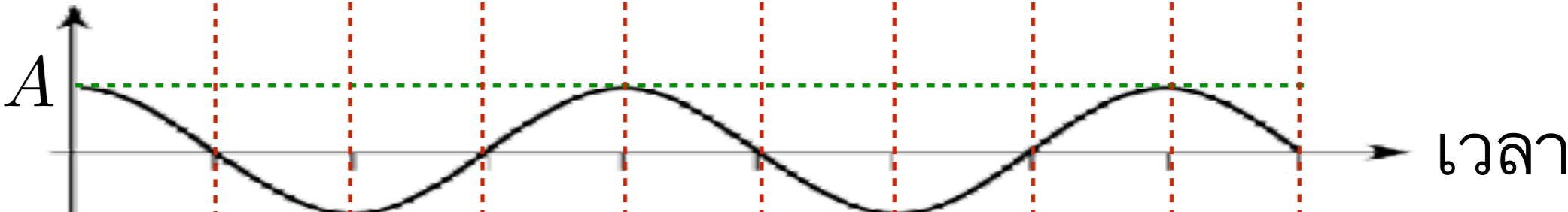
$$a(t) =$$

ฟังก์ชัน sine กับ cosine นั้นมีค่าอยู่ระหว่าง หมายความว่า

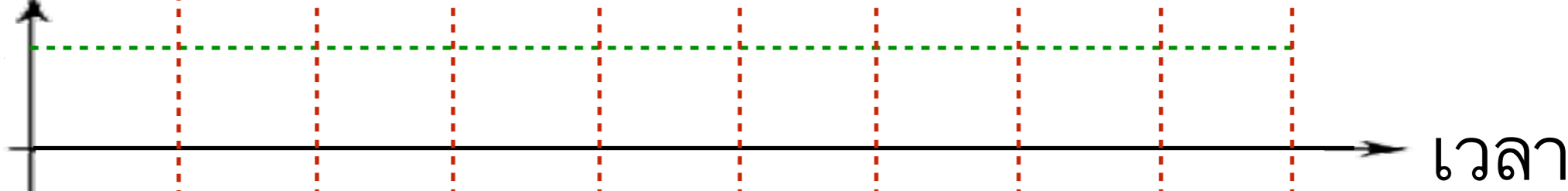
- ▶ วัตถุเคลื่อนที่อยู่ระหว่าง
- ▶ อัตราเร็วสูงสุดอยู่ที่
- ▶ อัตราเร่งอยู่ที่
- ▶ จงบอกตำแหน่งที่วัตถุมี (1) อัตราเร็วสูงสุด และ (2) อัตราเร่งสูงสุด

Simple harmonic motion

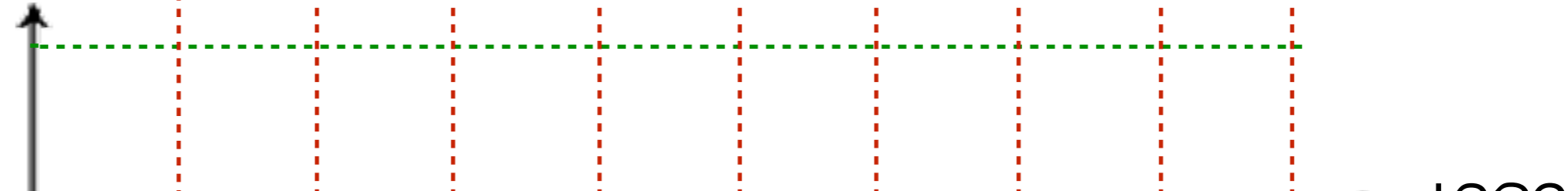
การกระจัด



ความเร็ว



ความเร่ง



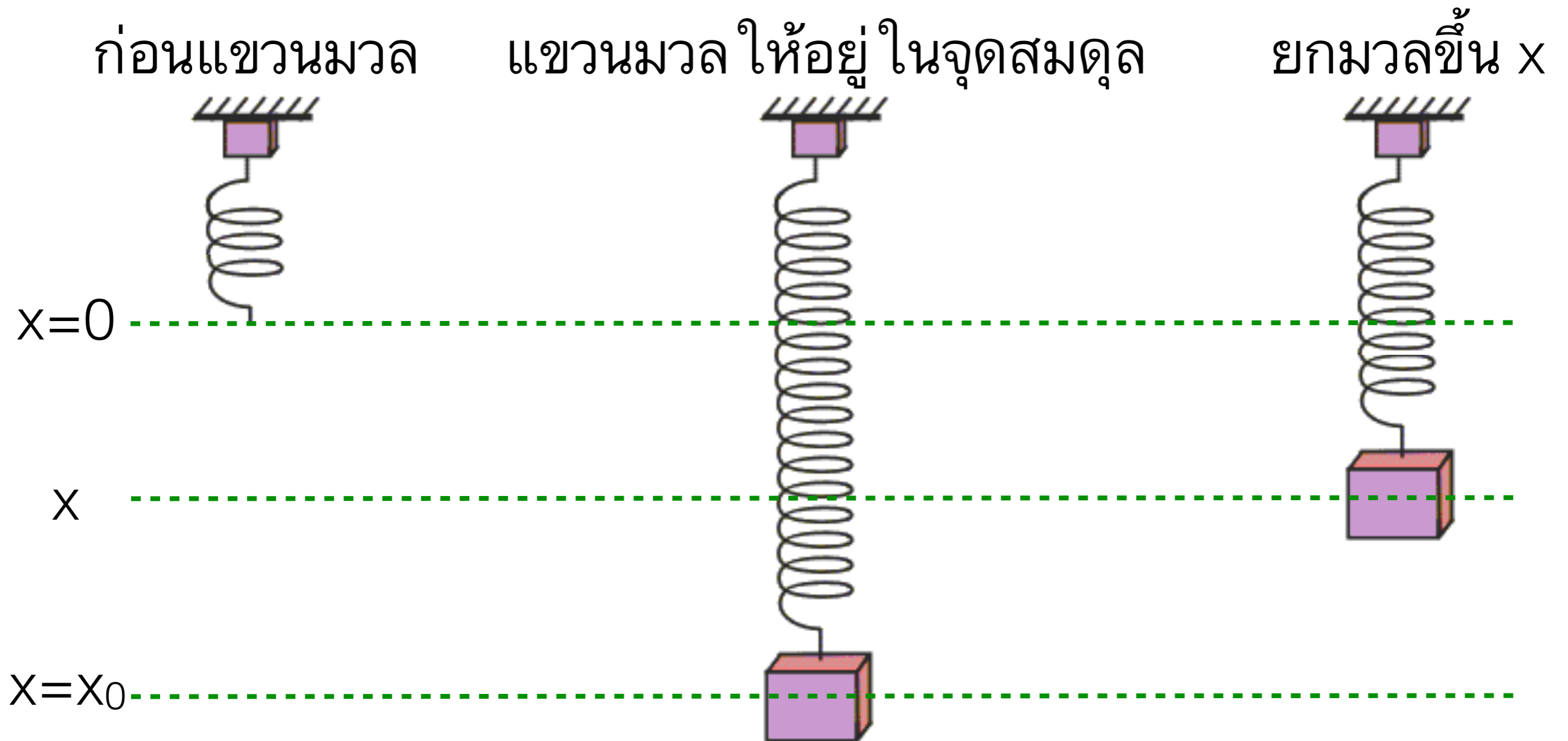
Simple harmonic motion

เราสามารถหา

- ▶ อัตราเร็ว ในรูปแบบของการกระจัด
- ▶ มุมเฟสเริ่มต้น ในรูปแบบของการกระจัดและความเร็ว

ตัวอย่าง

ถ้าเราแขวนสปริงอันหนึ่งที่มีค่าคงตัวสปริง k และแขวนมวล m ไว้กับด้านล่างของสปริง ให้มวลอยู่ในจุดสมดุล จากนั้นยกมวลสูงขึ้นกว่าจุดสมดุลเป็นระยะ x จงแสดงว่ามวลจะมีการเคลื่อนที่แบบ SHM



Credit: <http://images.tutorvista.com/content/oscillations/block-spring-shm.gif>

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

ถ้ากำหนดให้ $k = 50 \text{ N/m}$, $m = 50\text{g}$, $x = 5 \text{ cm}$ ณ เวลา $t=0$ โดย
กล่องถูกปล่อยจากหยุดนิ่ง จงหา

- ▶ อัมพล (Amplitude) และค่าความถี่เชิงมุม รวมทั้งเฟสเริ่มต้น
- ▶ คาบการเคลื่อนที่และความถี่
- ▶ อัตราเร็วและอัตราเร่งของมวล m ณ เวลา 3 วินาทีหลังปล่อย

Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

- ▶ ไม่มีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน
- ▶ มวลสปริงมีค่าน้อยมาก
- ▶ แรงของสปริงเป็นแรงอนุรักษ์
 - ➔ ผลรวมของงานทั้งหมด ที่เกิดขึ้นจากแรงดังกล่าว ในเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ครบรอบ มีค่าเป็นศูนย์
 - ➔ งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงดังกล่าว ในการเคลื่อนที่ระหว่างสองจุด ใดๆ ไม่ขึ้นกับเส้นทาง
 - ➔ ต.ย. เช่น แรงโน้มถ่วง, แรงไฟฟ้าระหว่างประจุ, แรงสปริง
- ▶ พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่า.....

Energy

พิจารณาพลังงานของการสั่นของสปริง

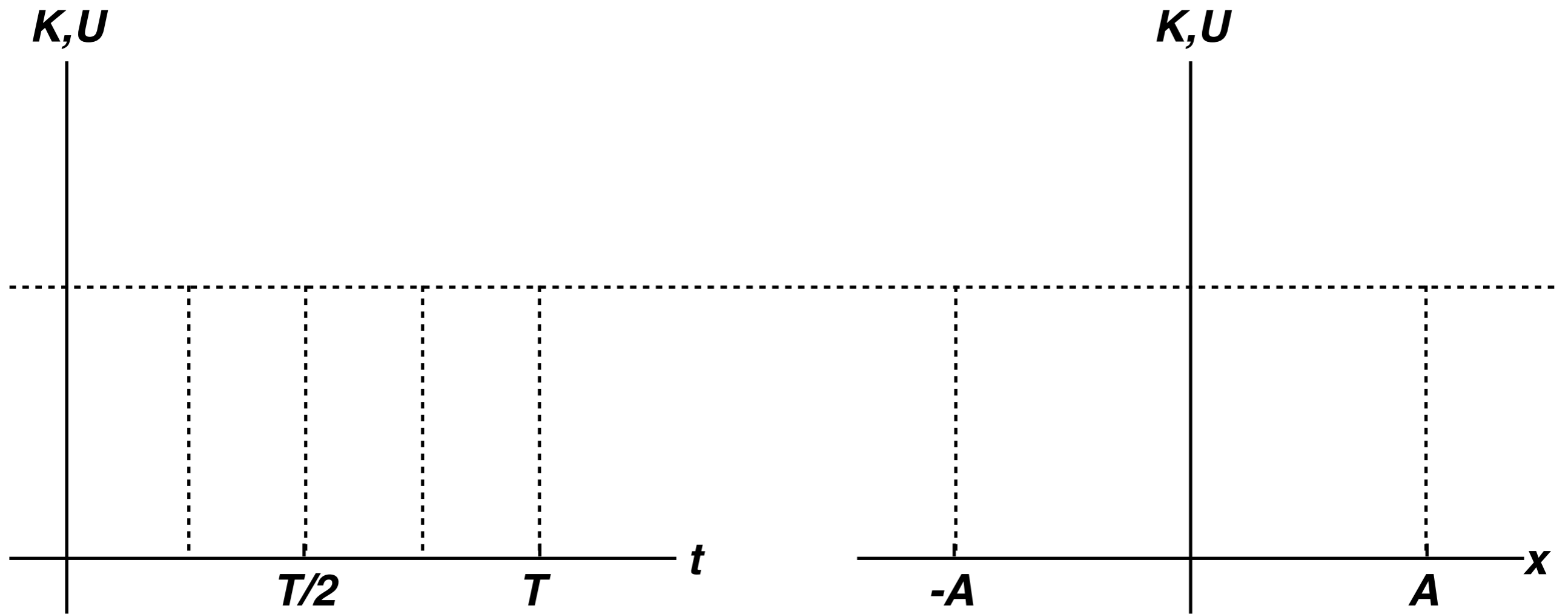
▶ พลังงานกลทั้งหมดของระบบมีค่าคงตัว

→ พลังงานจลน์

→ พลังงานศักย์

→ พลังงานกล = พลังงานจลน์ + พลังงานศักย์

Energy

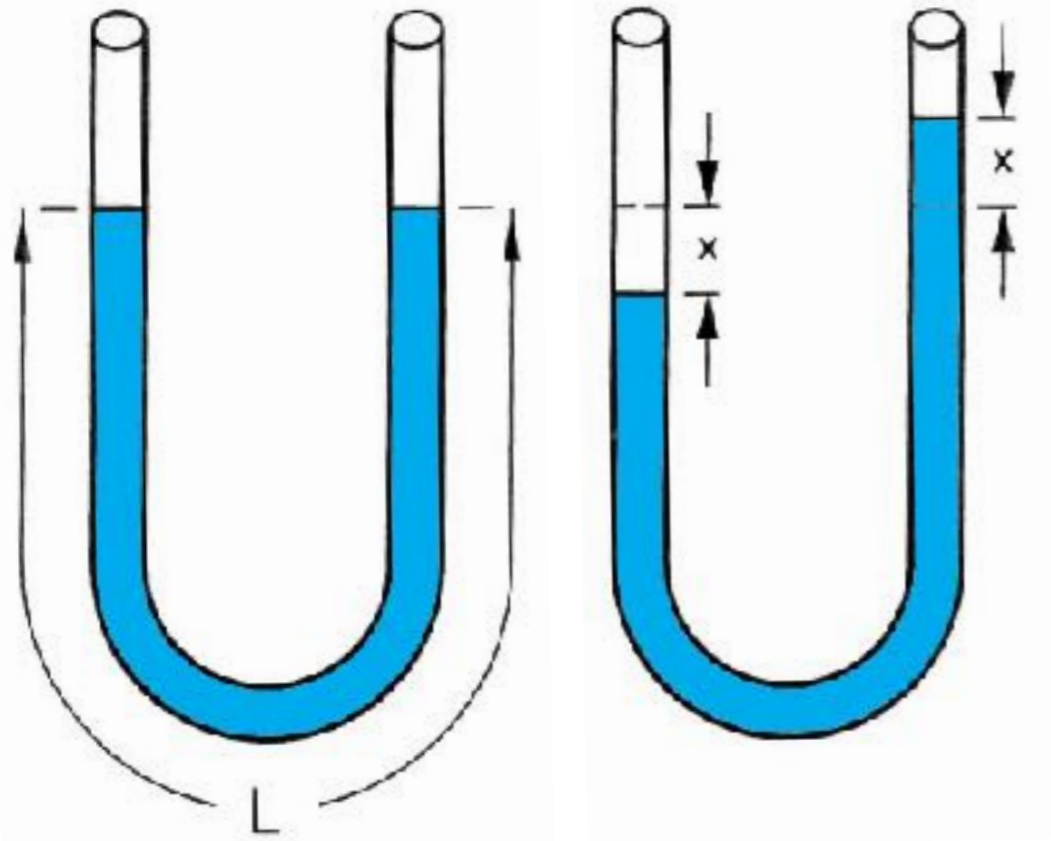


ลองใช้หลักการของพลังงานลองย้อนมาดูที่กรณีของ Spring-Mass system

ตัวอย่าง

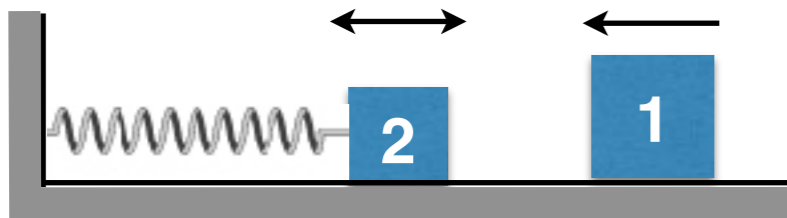
จงหาสมการบรรยายถึง SHM และค่าความถี่เชิงมุมของระบบท่อน้ำปลายเปิดรูปตัว U ที่เกิดการสั่น โดยไม่คิดถึงแรงเสียดทานภายใน ท่อ ให้น้ำมีมวล M ความหนาแน่น ρ และท่อปลายเปิดมีภาคตัดขวาง

A



ตัวอย่าง

กล่องหมายเลข 2 มีมวล 2.0 kg ติดอยู่ที่ปลายสปริงดังรูป กำลังเคลื่อนที่แบบ SHM โดยมีคาบเป็น 20 ms และกำหนดให้ตำแหน่งของกล่องเป็นไปตามสมการ



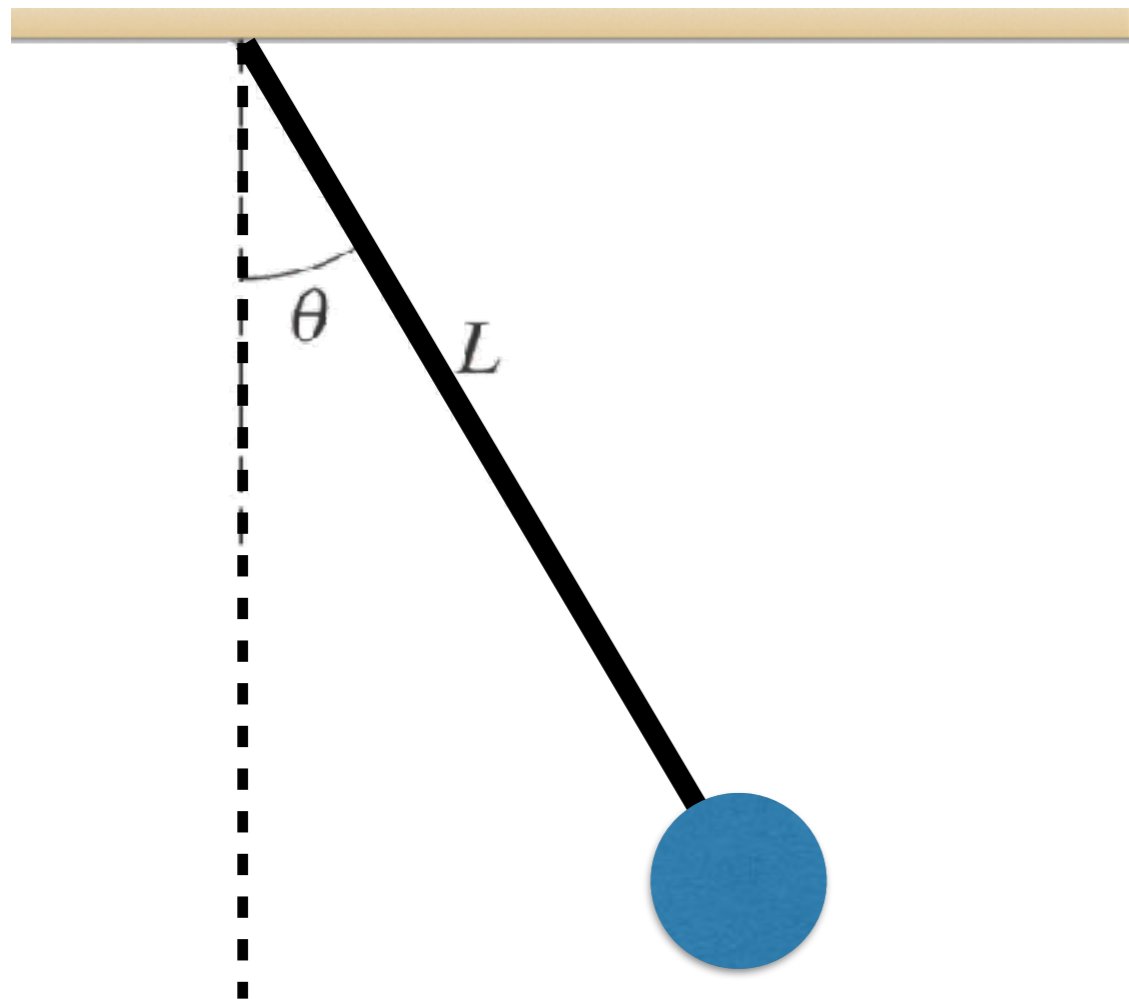
$$x(t) = (1.0 \text{ cm}) \cos(\omega t + \pi/2)$$

กล่องหมายเลข 1 มีมวล 4 kg ไถลเข้าหากกล่องหมายเลข 2 ด้วยอัตราเร็วคงที่ 6.0 m/s ในทิศทางขนานกับความยาวของสปริง กล่องทั้งสองจะชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ที่เวลา 5 ms โดยหลังชนกล่องทั้งสองจะติดกันไป (ให้ถือว่าช่วงเวลาที่เกิดการชนน้อยกว่าคาบของการสั่นมาก ๆ) จงหา Amplitude ของการเคลื่อนที่แบบ SHM ภายหลังการชน

ตัวอย่าง

Simple pendulum

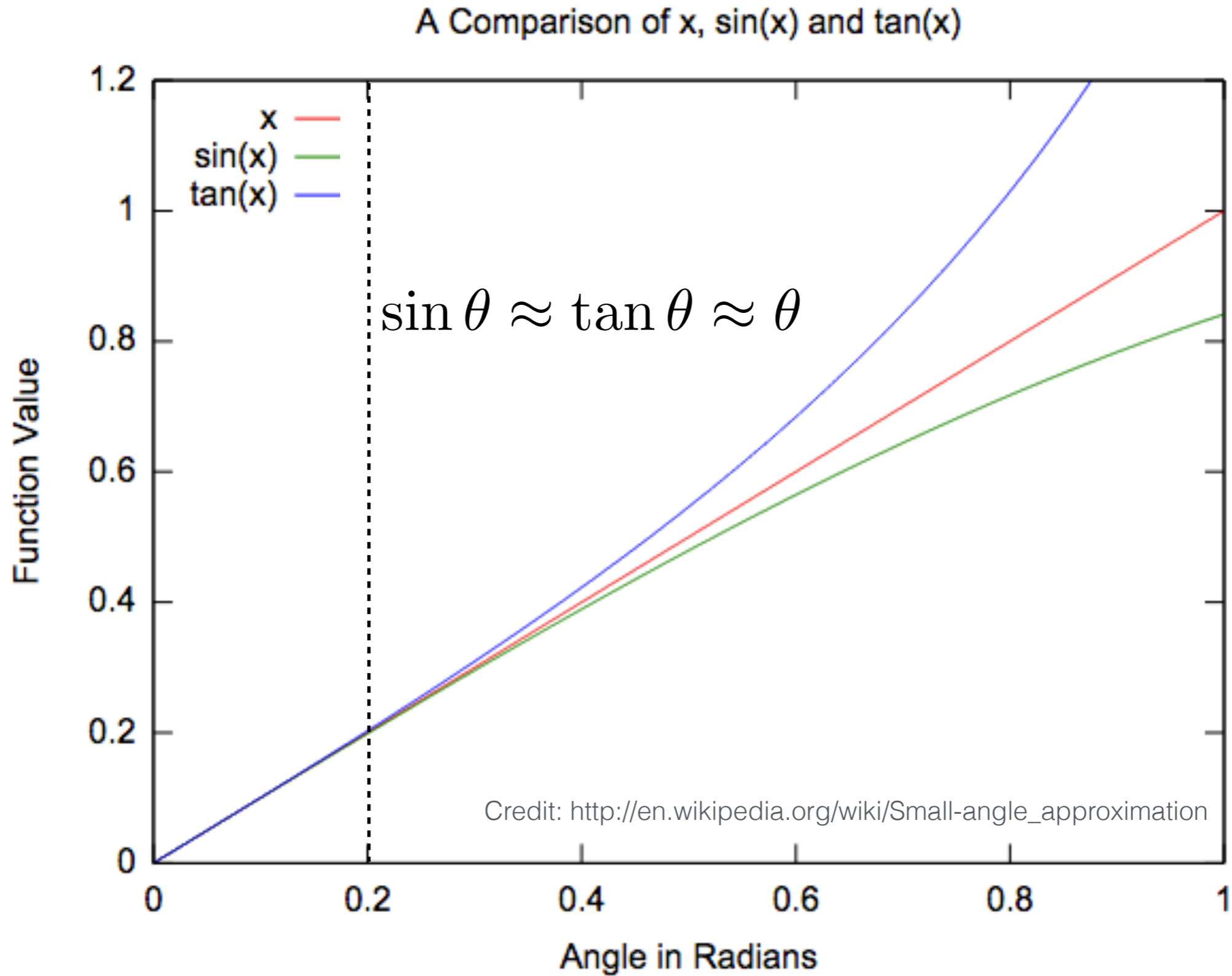
แบบจำลอง ในอุดมคติของก้อนมวลที่แขวนไว้กับเชือกไร้มวลที่ไม่ยืด



- ▶ แรง เป็นแรงที่ทำให้มวลเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมเท่านั้น
- ▶ แรงคืนตัวเกิดจาก
- ▶ ในกรณีทั่ว ๆ ไป การเคลื่อนที่แบบนี้ไม่ได้เป็น SHM เพราะว่า

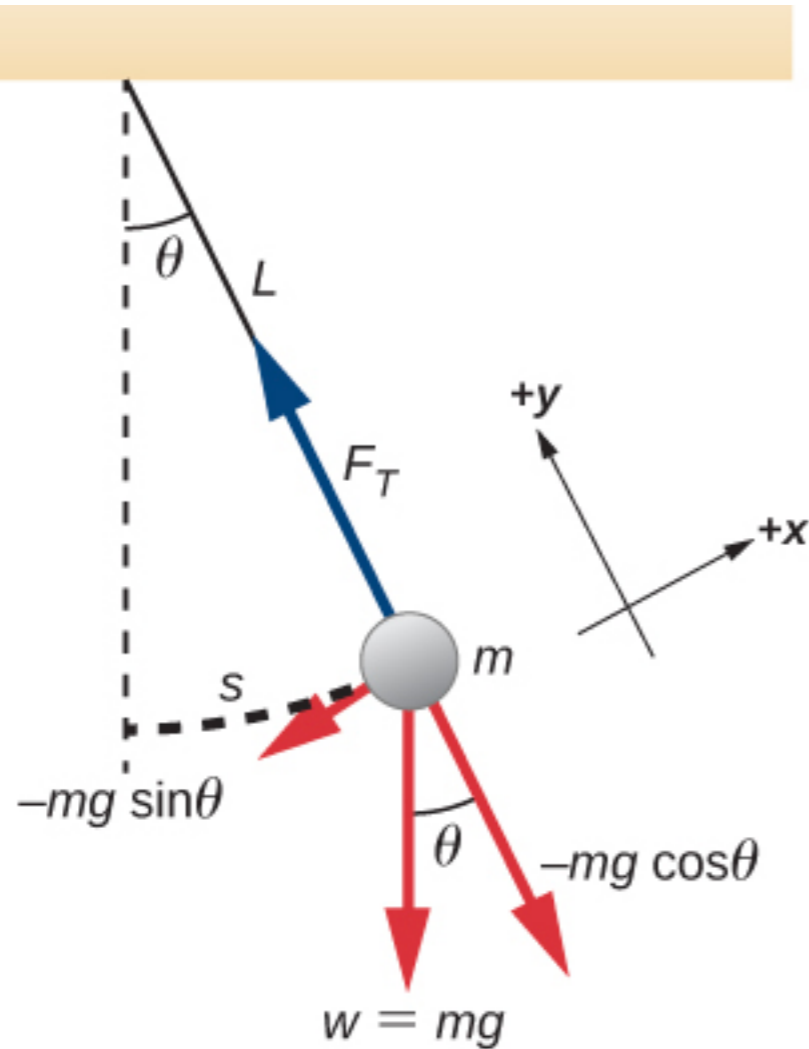


Simple pendulum



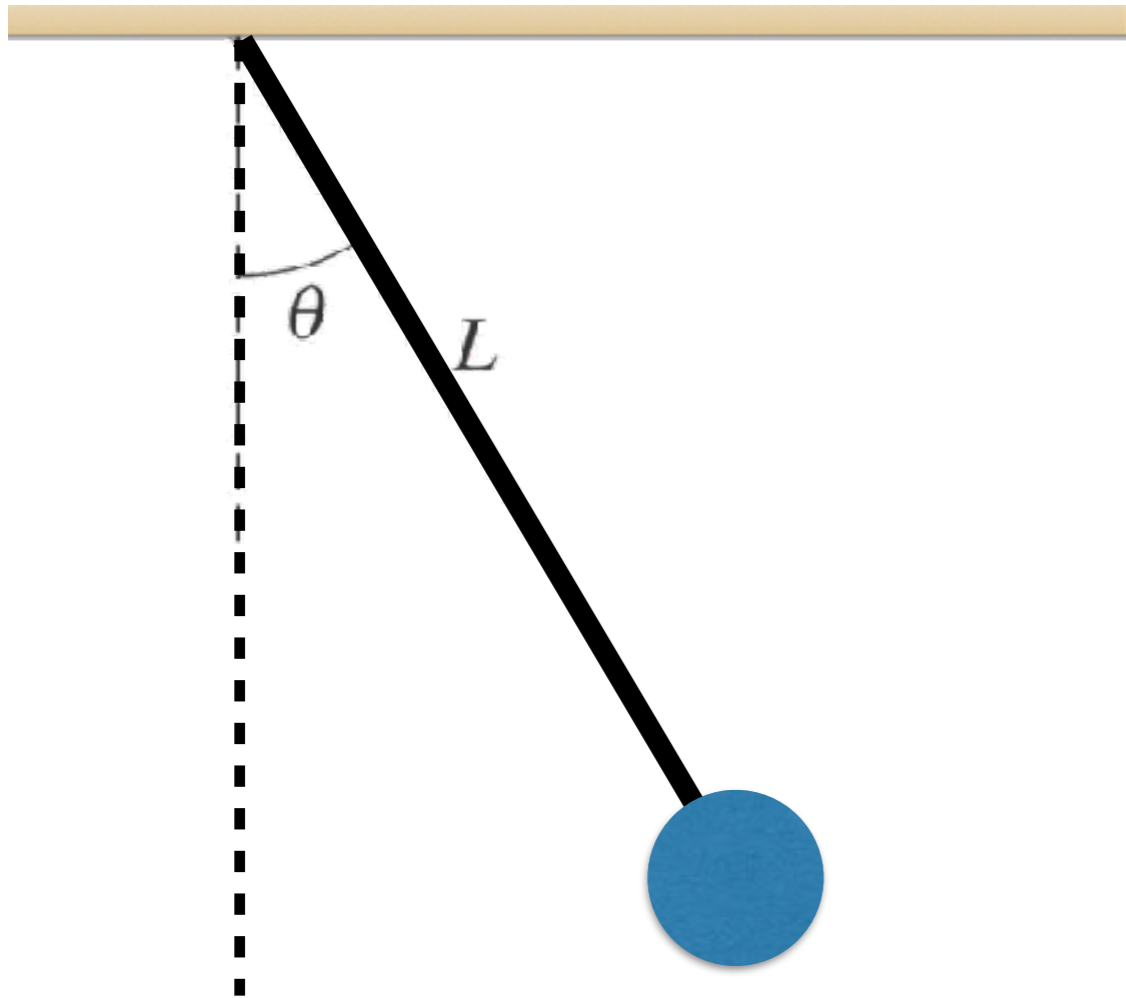
Simple pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ ($x \approx$) การแกว่งจะเป็น SHM



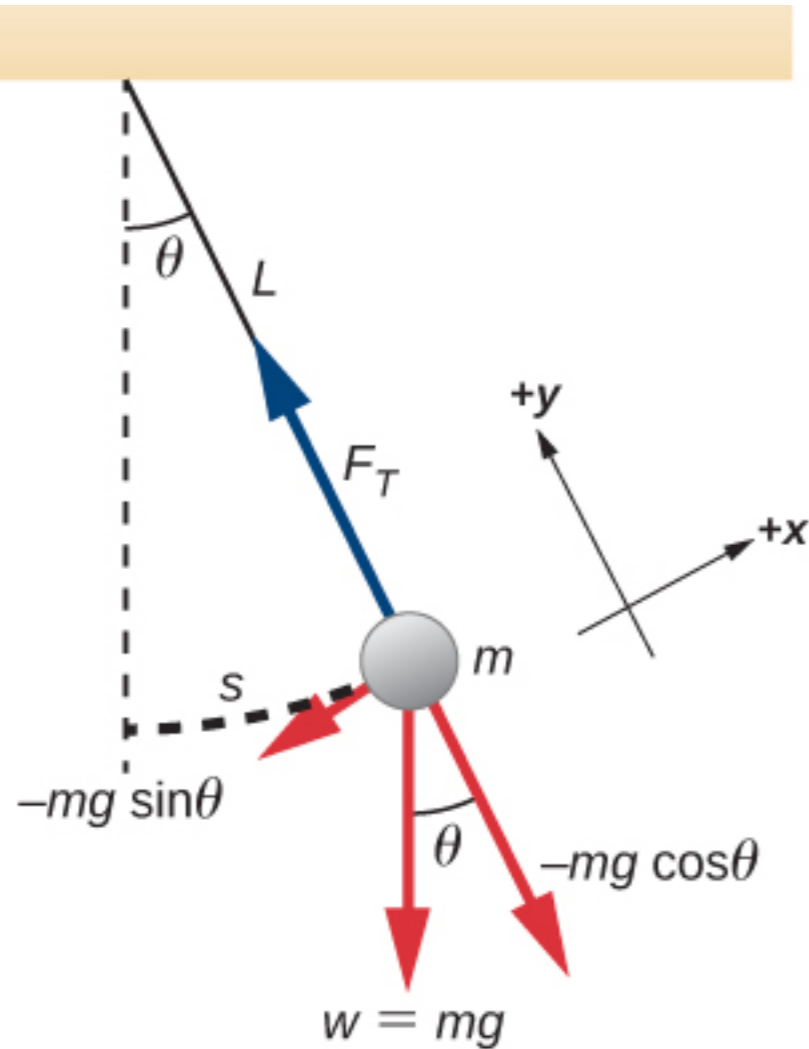
Simple pendulum

แล้วถ้าเราแตกแรงอีกแบบ ?



Simple pendulum

ลองพิจารณาจากหลักการคงที่ของพลังงาน

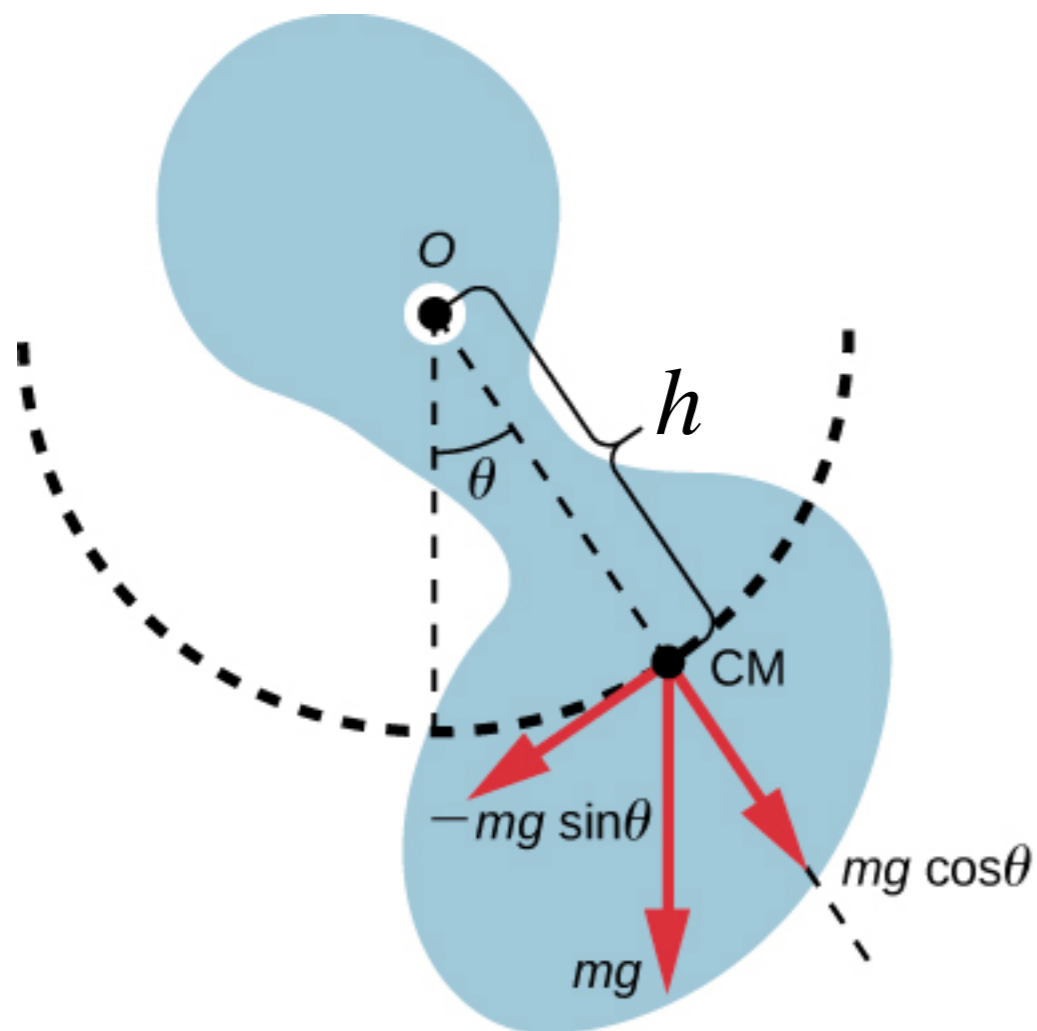


เปรียบเทียบคาบของ Spring-mass system กับ Pendulum

ทบทวนเรื่องการหมุน

Physical pendulum

เป็นการแกว่งของวัตถุที่มีขนาดจำกัด โดยเราจะพิจารณาทอร์กคืนตัว โดยในรูปเป็นการแกว่งของวัตถุรอบแนวแกนที่พุ่งออกจากกระดาศ (แทนด้วยแกน Z) ผ่านจุด O โดยมี CM เป็นจุดศูนย์กลางมวล



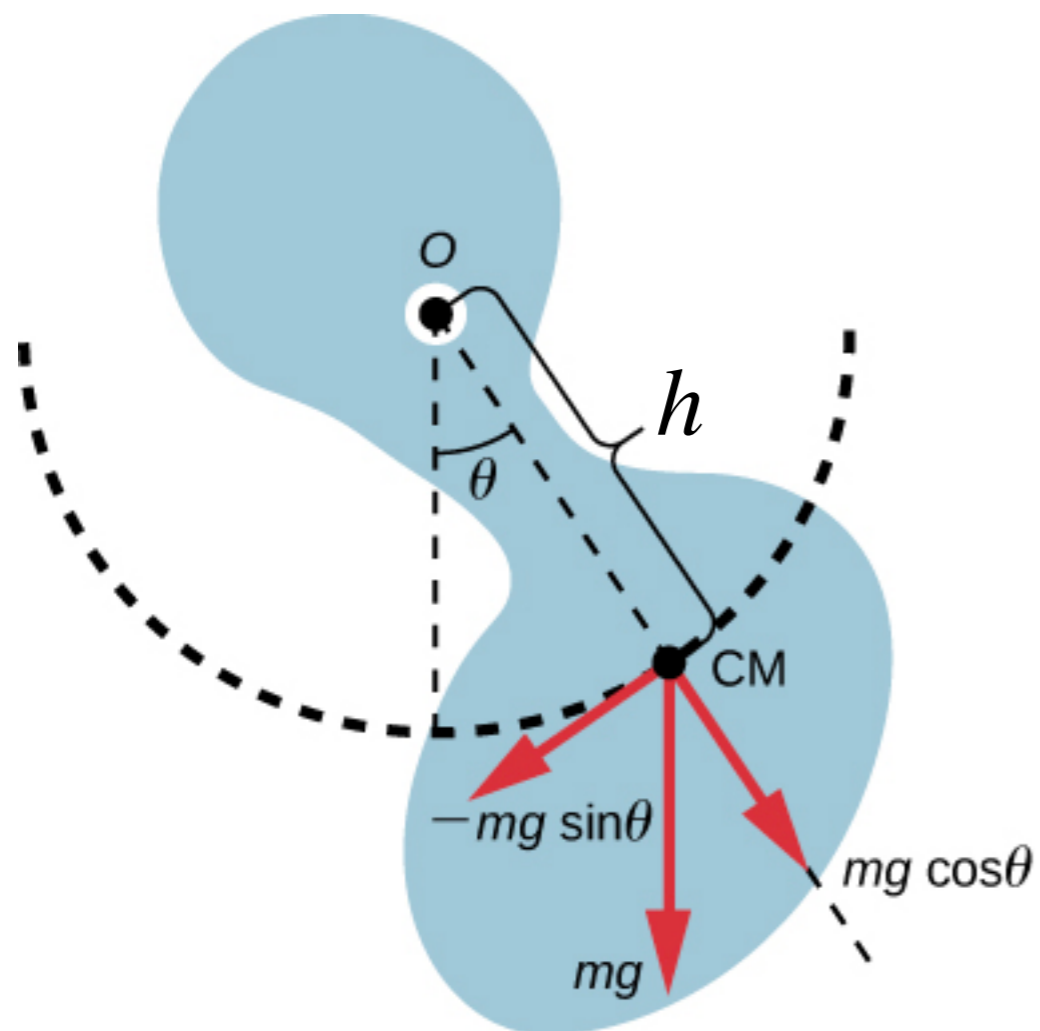
- ▶ h = ระยะจากจุดหมุน O ถึง CM
- ▶ ทอร์กตามแนวแกน Z หาได้จาก

- ▶ ถ้าให้ I คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุเกร็ง จาก

$$\tau_O =$$

Physical pendulum

เมื่อแกว่งด้วยมุมเล็กมาก ๆ $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$

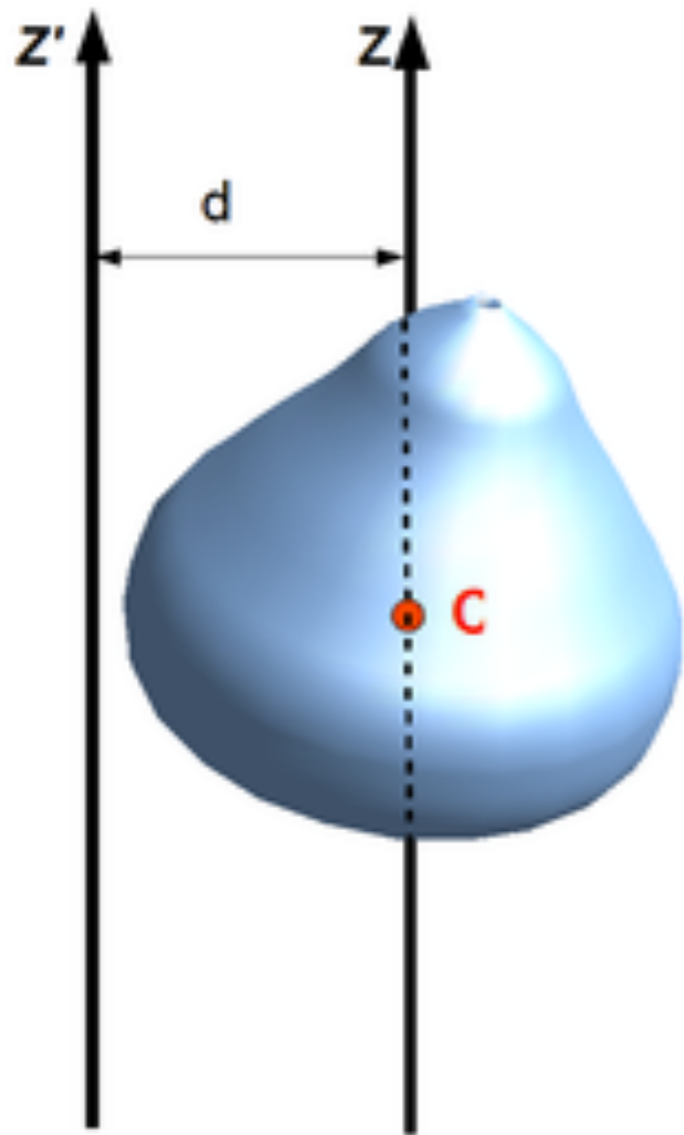


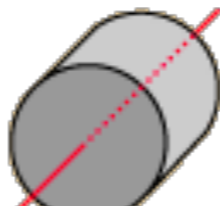

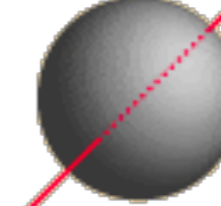
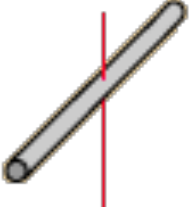
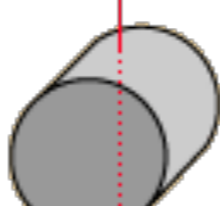
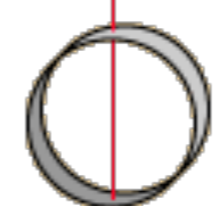
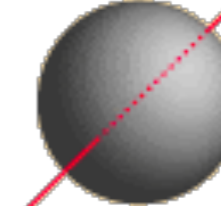
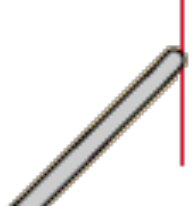
ความถี่เชิงมุม $\omega =$

คาบ $T =$

บททวนการหา Moment of inertia

Parallel axis theorem



<p>Solid cylinder or disc, symmetry axis</p>  $I = \frac{1}{2}MR^2$	<p>Hoop about symmetry axis</p>  $I = MR^2$	<p>Solid sphere</p>  $I = \frac{2}{5}MR^2$	<p>Rod about center</p>  $I = \frac{1}{12}ML^2$
<p>Solid cylinder, central diameter</p>  $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	<p>Hoop about diameter</p>  $I = \frac{1}{2}MR^2$	<p>Thin spherical shell</p>  $I = \frac{2}{3}MR^2$	<p>Rod about end</p>  $I = \frac{1}{3}ML^2$

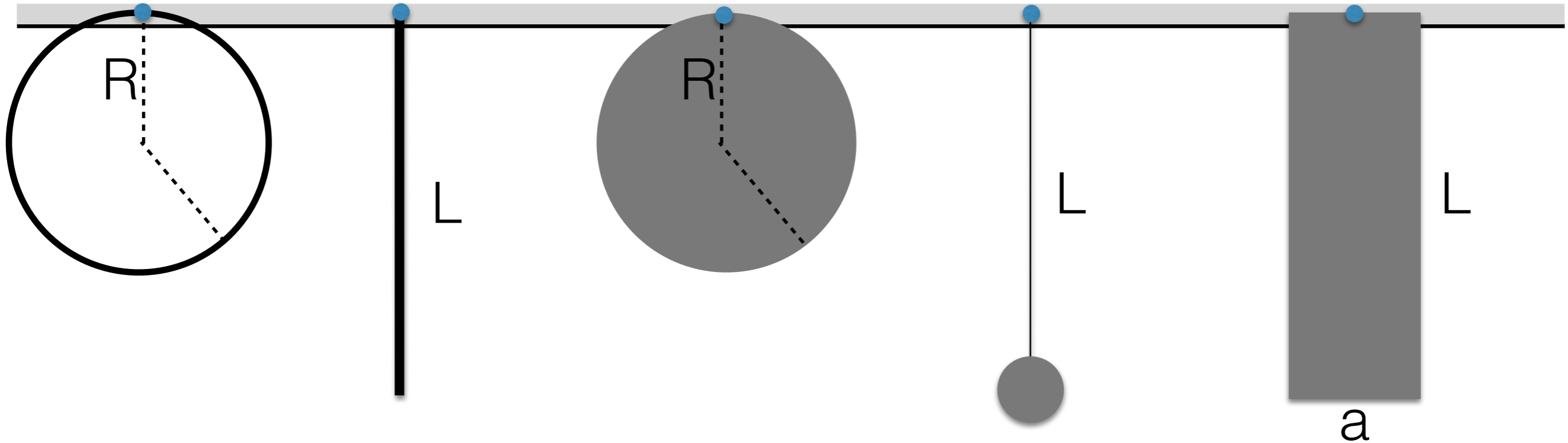
Credit: <http://www.hyperphysics.de/hyperphysics/hbase/mi.html>

$$I_{z'} = I_{cm} + Md^2$$

Credit: https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_axis_theorem

ตัวอย่าง

จงหาคาบของการแกว่งของระบบต่อไปนี้ และสรุปว่าคาบของการแกว่งขึ้นอยู่กับมวลหรือไม่ ให้การหมุนนี้อยู่ในแนวระนาบ แกนของการหมุนคือทิศที่พุ่งออกจากกระดาษ

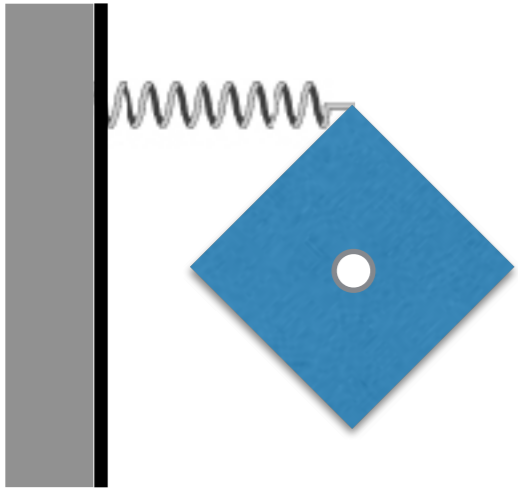


เปรียบเทียบขนาดของวัตถุ ถ้าต้องการให้วัตถุทุกชิ้นมีคาบเท่ากัน

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง



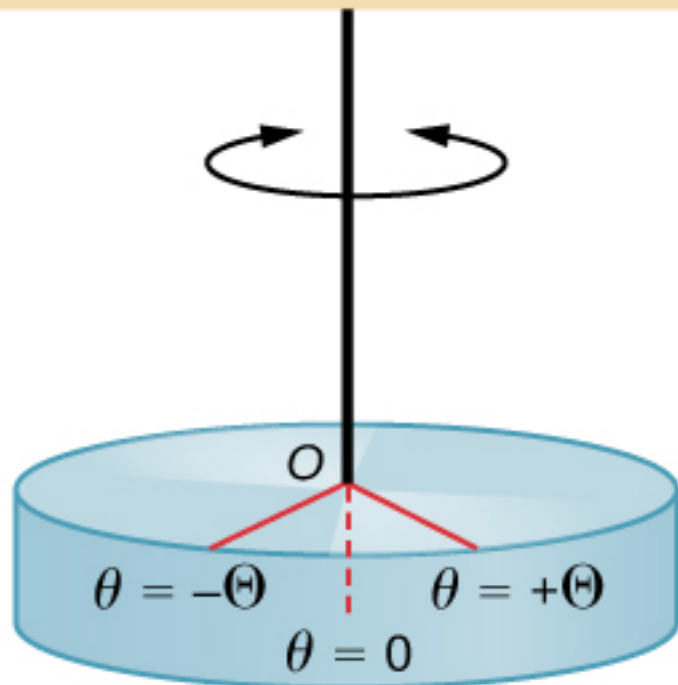
กล่องลูกบาศก์มวล 3.0 kg แต่ละด้านยาวด้านละ 6 cm โดยติดอยู่กับแกนหมุนที่ผ่านจุดศูนย์กลางมวลของมัน ดังรูป ที่มุมด้านบนของกล่องมีสปริง ที่มีค่าคงที่ของสปริงเท่ากับ 1200 N/m เชื่อมอยู่โดยยึดติดกับผนัง ในตอนแรกสปริงไม่มีการยืดหรือกดตัว ถ้าเราหมุนกล่องเป็นมุม 3 องศา แล้วปล่อยให้แกว่งแบบ SHM จงคำนวณหาคาบของการแกว่ง

ตัวอย่าง

Torsion pendulum

พิจารณาจากมุม

Credit: <https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums>



Torsion constant of wire

$$\tau_o = -\kappa\theta = I\alpha$$

$$= -\kappa\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

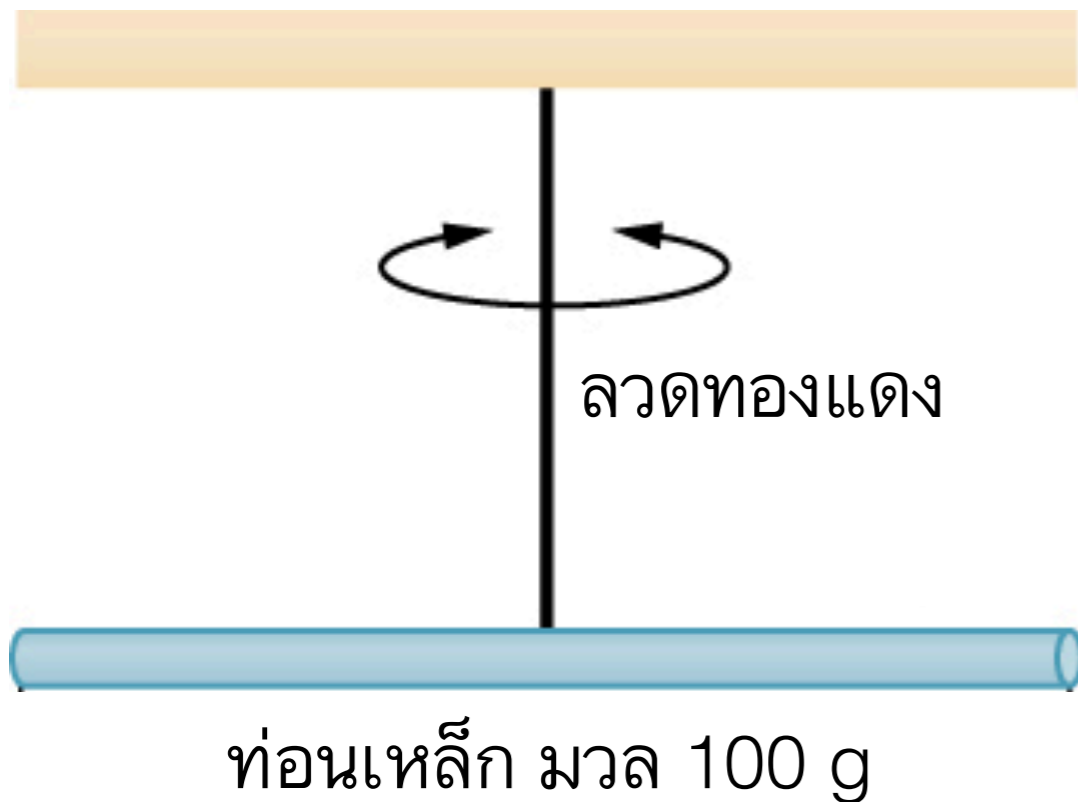
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta = 0 \quad \leftarrow \text{SHM}$$

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

ตัวอย่าง

Credit: <https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-4-pendulums>



ลวดทองแดงเส้นหนึ่ง ปลายด้านหนึ่งผูกไว้กับเพดาน ปลายอีกด้านหนึ่งผูกไว้ตรงกลางท่อนเหล็กที่มีมวล 100g ความยาว 20 cm เมื่อบิดลวดทองแดงไปเล็กน้อยและปล่อย ปรากฏว่าท่อนเหล็กเกิดการแกว่งรอบลวดทองแดงด้วยคาบ 10 วินาที จงหา Torsion constant โดยสมมติว่า โมเมนต์ความเฉื่อยของลวดทองแดงเมื่อเทียบกับแกนหมุดมีค่าน้อยกว่า โมเมนต์ความเฉื่อยของท่อนเหล็กมาก ๆ

ตัวอย่าง

Linear differential equation

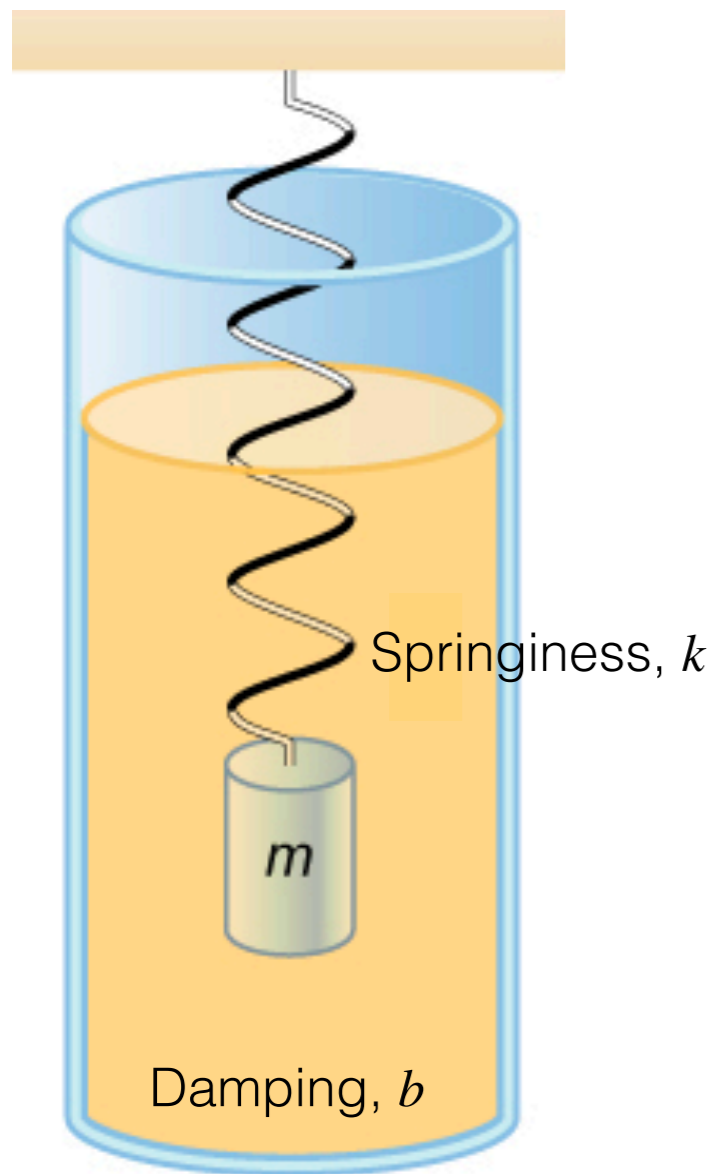
“Linear differential equations are differential equations having solutions which can be added together in particular linear combinations to form further solutions.”

Linear differential equation

Linear differential equation

Damped oscillations

พิจารณา ในสถานการณ์ที่สมจริงมากยิ่งขึ้น โดยมีแรงไม่อนุรักษ์ (non-conservative force) เช่นแรงเสียดทาน หรือแรงต้านอากาศ เข้ามาเกี่ยวข้อง การแกว่งที่เกิดขึ้นจะถูกหน่วง



พิจารณาเฉพาะแนวแกน x ตามรูป

Damping force

$$F_d = -bv$$

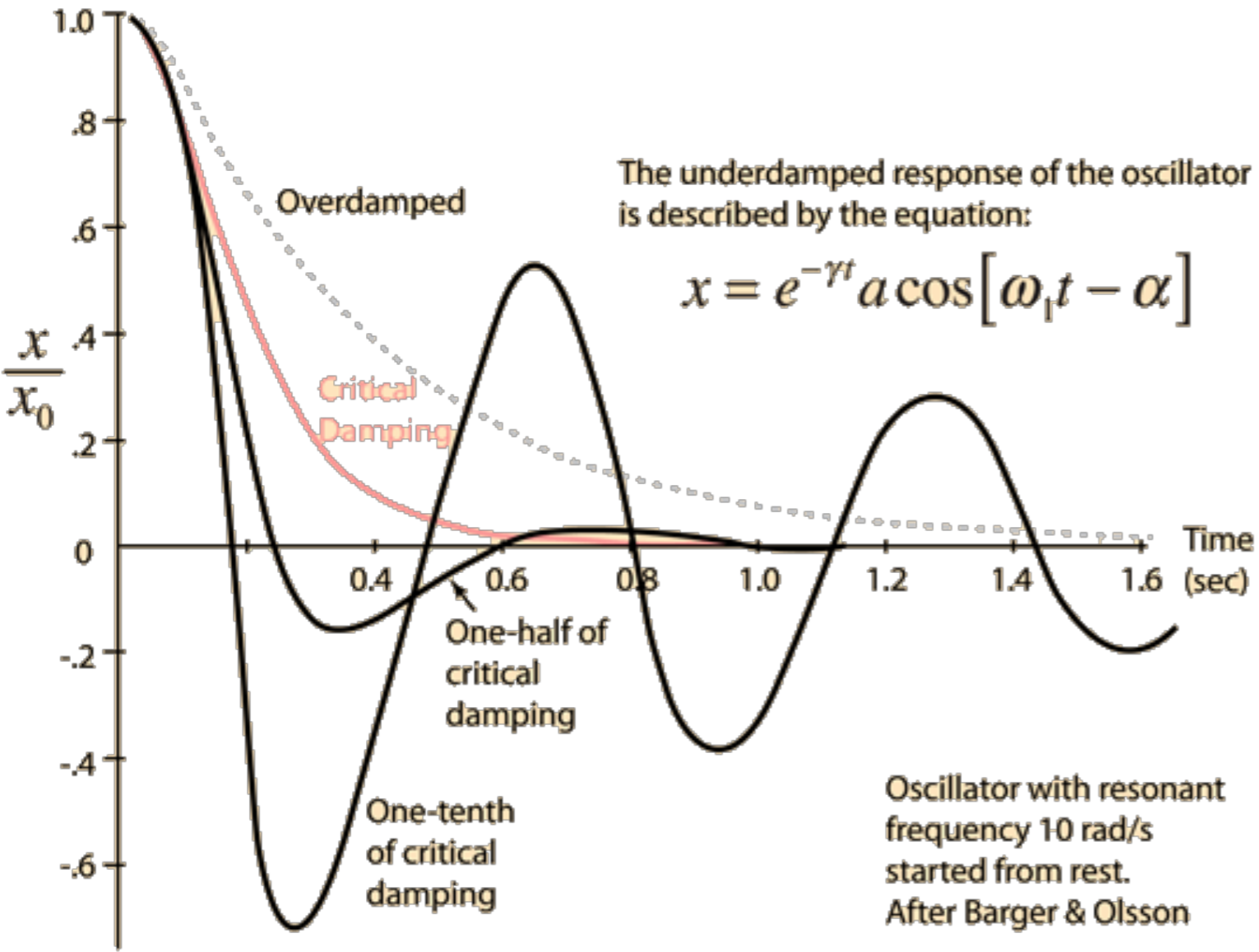
$$F_s = -kx$$

Damping constant

แรงที่กระทำต่อมวล m (พิจารณาว่าผลของแรงโน้มถ่วงมีน้อยมากเมื่อเทียบกับ F_d และ F_s)

ค่าคงที่ของความหน่วง $\gamma = b/2m$

Damped oscillations



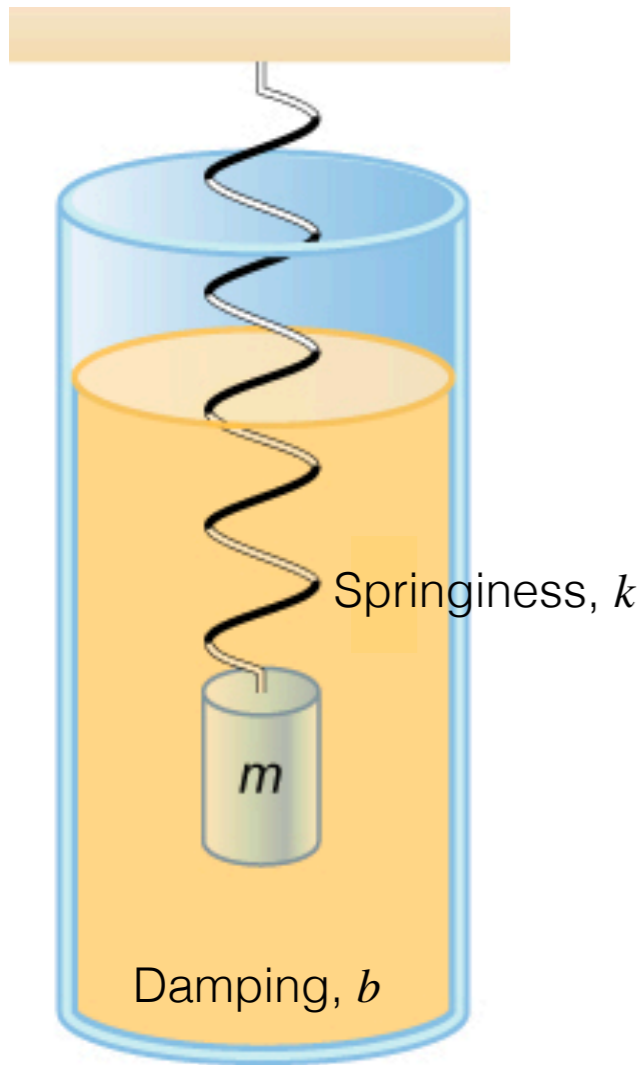
Overdamped

Critical damping

Underdamped

Credit: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/oscd.html#c1>

Underdamped oscillations

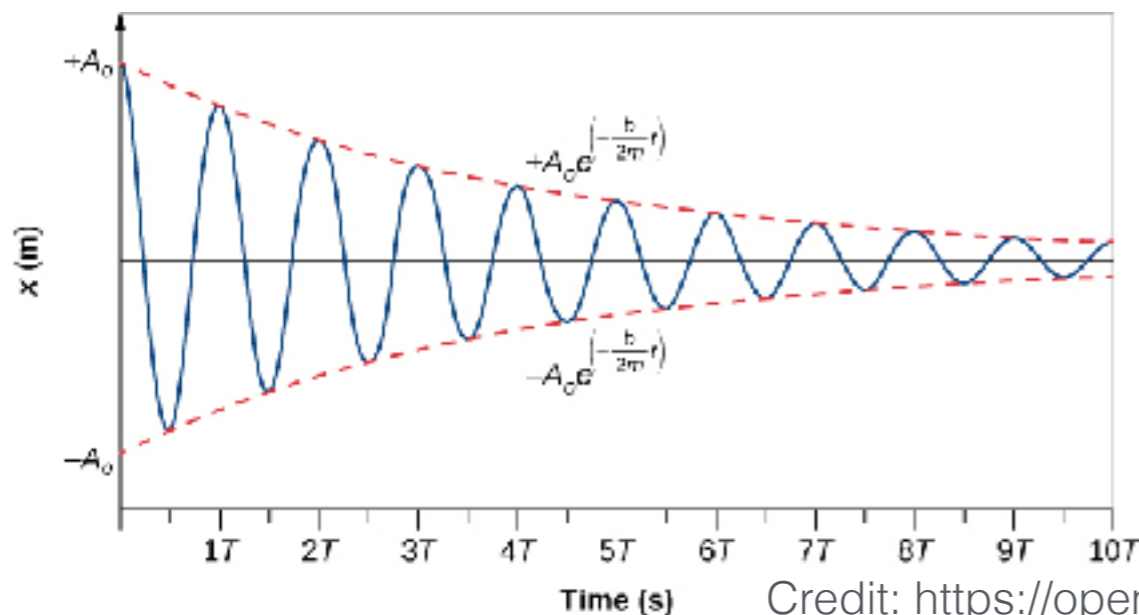


$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

คำตอบของสมการจะได้ว่า

และค่าความถี่เชิงมุมมีค่าเป็น

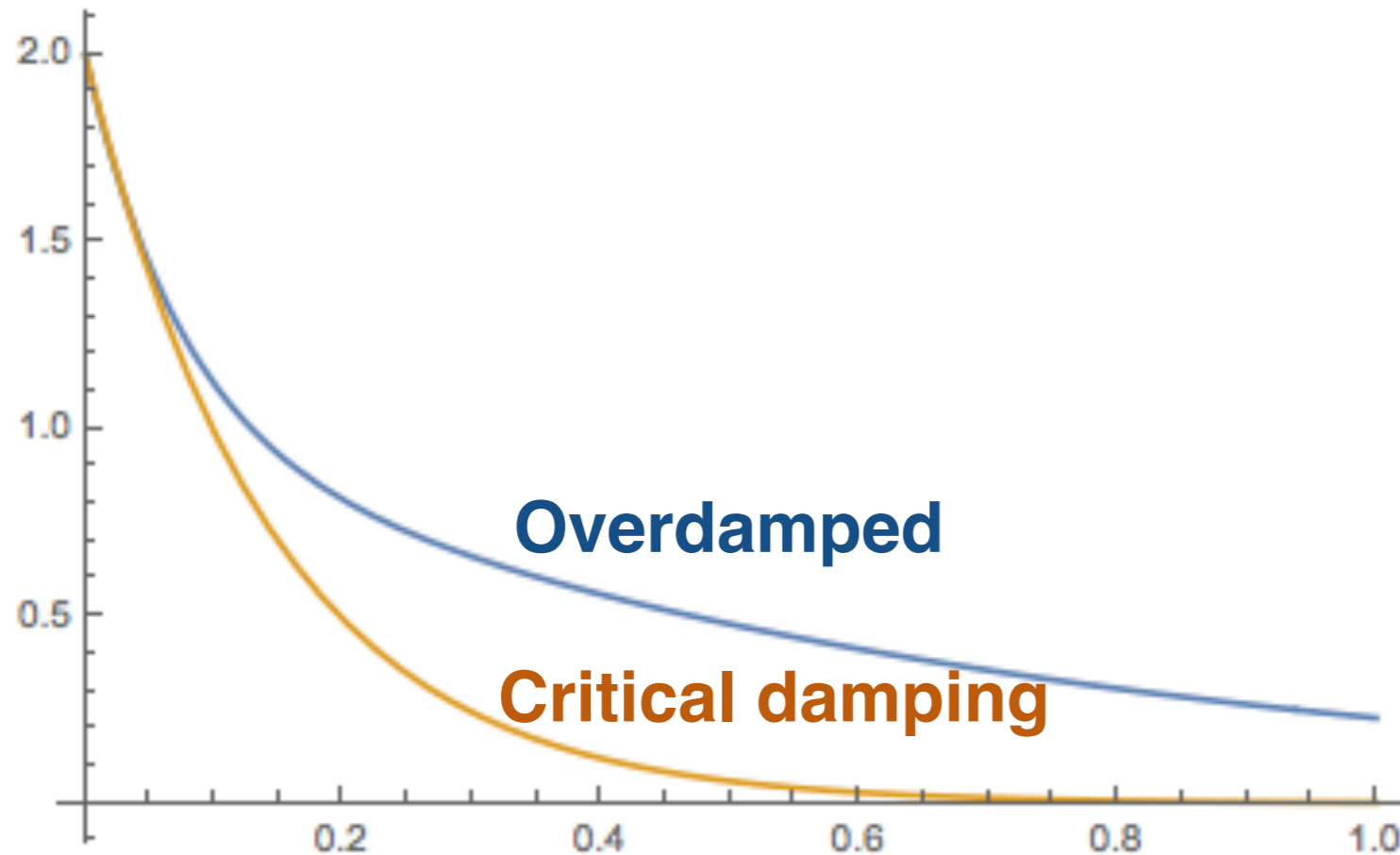
มีจุดที่น่าสังเกต 2 อย่างคือ



Credit: <https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-5-damped-oscillations>

Overdamped - Critical damping

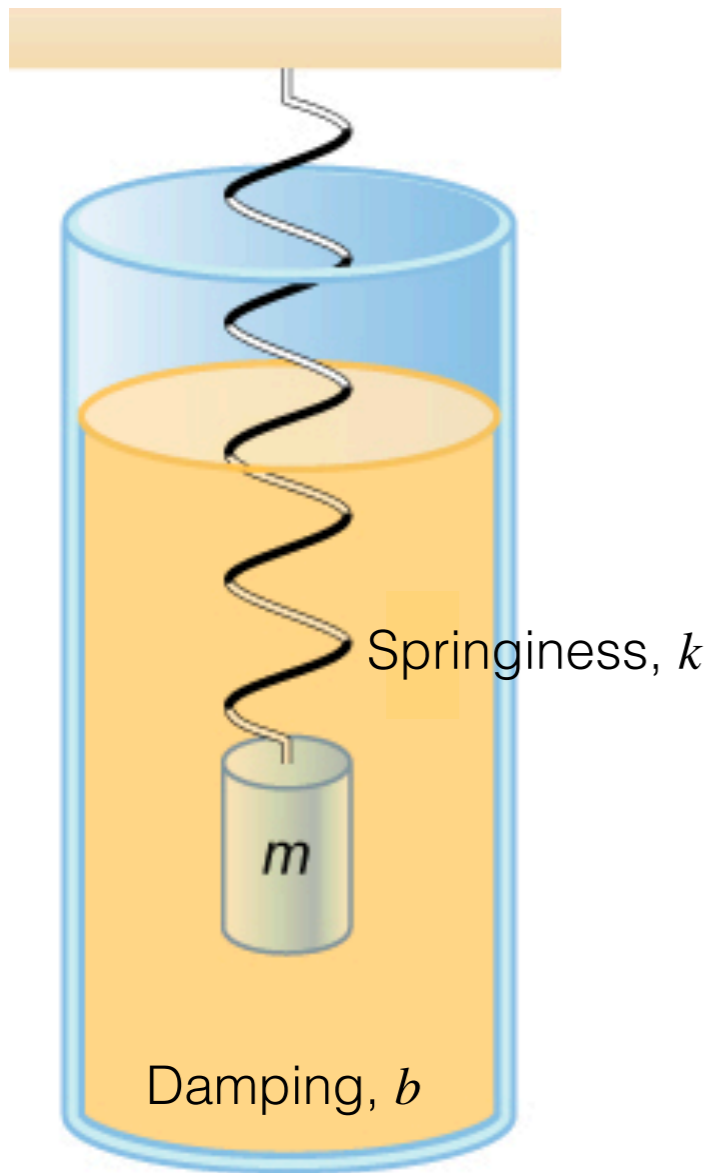
- ▶ ในกรณีของ critical damping เราจะสังเกตได้ว่า ในขณะนี้เรามี solution เดียวคือ
- ▶ หา 2nd solution โดยใช้วิธี Method of reduction of order (รอเรียนใน Calculus) เราจะได้ solution ออกมาในรูป



$$\begin{aligned} & \text{--- } e^{\frac{(-b+\sqrt{b^2-4mk})t}{2m}} + e^{\frac{(-b-\sqrt{b^2-4mk})t}{2m}} \\ & \text{--- } 2e^{-\frac{bt}{2m}} + te^{-\frac{bt}{2m}} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

Credit: <https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/15-5-damped-oscillations>



พิจารณาจากระบบตามรูป ให้ $m = 250$ g, $k = 85$ N/m, และ $b = 70$ g/s จงคำนวณหา

- (ก) คาบของการเคลื่อนที่
- (ข) ระยะเวลาเท่าใดที่ค่า Amplitude ของการเคลื่อนที่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น
- (ค) ระยะเวลาเท่าใดที่พลังงานกลของระบบลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง

Forced oscillations and resonance



Free oscillation

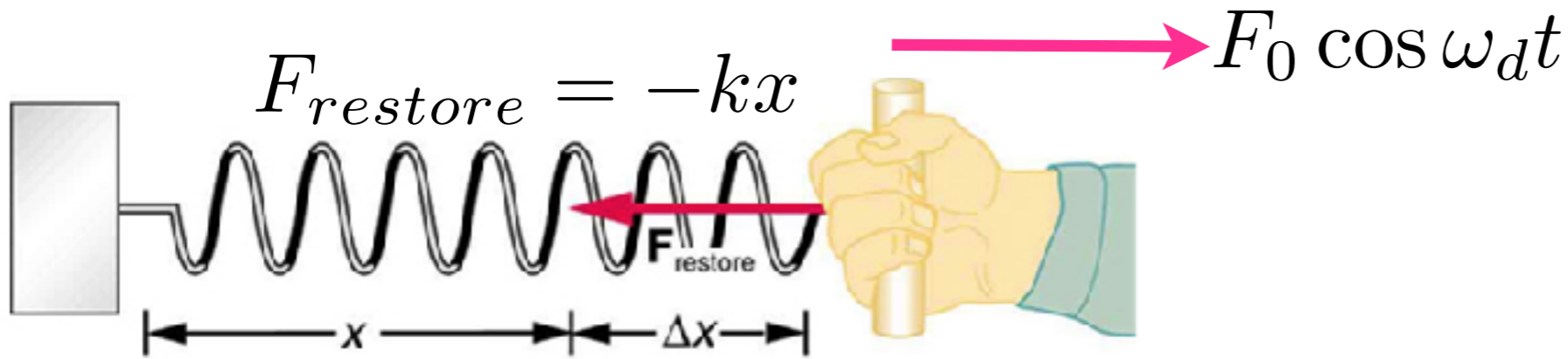


Forced/Driven oscillation

ในกรณีของ Forced oscillation นั้นเรามีความถี่เชิงมุมที่เกี่ยวข้องกับระบบอยู่สองค่าคือ

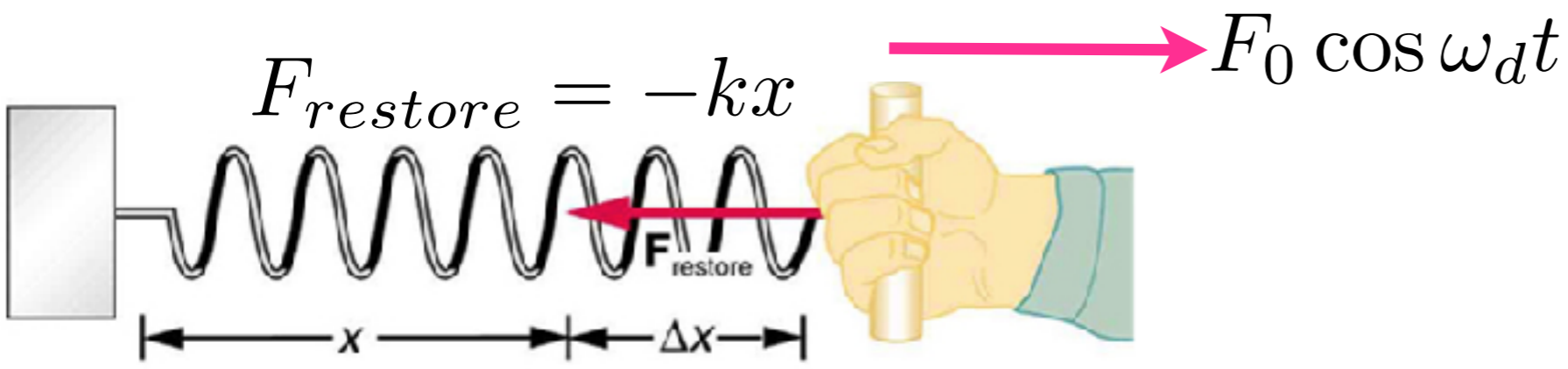
- ▶ ค่าความถี่ธรรมชาติ (Natural angular frequency, ω_0) บอกถึงค่าความถี่เชิงมุมของระบบที่ถูกรบกวนให้แก่วงจากการกระทำเพียงขณะหนึ่ง จากนั้นปล่อยให้แกว่งโดยอิสระ (สิ่งที่เรียนมาก่อนหน้า)
- ▶ Angular frequency ที่เกิดจากแรงขับ (Driving force), ω_d

Forced oscillations and resonance



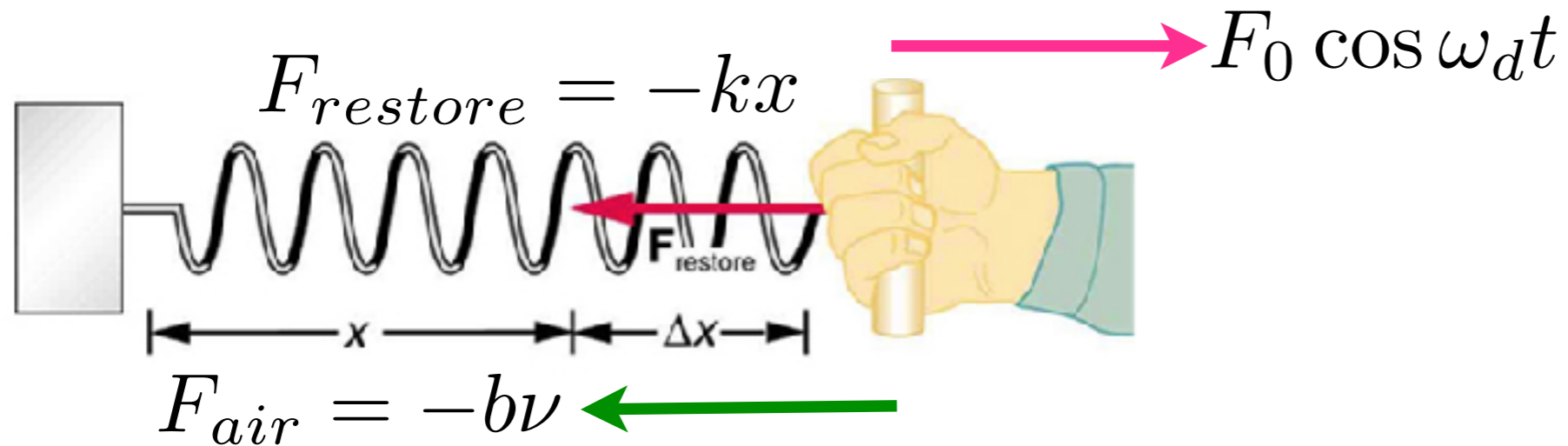
พิจารณาเมื่อเวลาผ่านไปนาน
พอสมควร ระบบจะสั่นด้วย
ความถี่ _____

Forced oscillations and resonance



Forced oscillations and resonance

พิจารณาแรงต้านอากาศเข้ามาเกี่ยวข้อง



$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_d t$$

คำตอบของสมการนี้ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

- ▶ Transient solution
- ▶ Steady solution

Forced oscillations and resonance

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_d t$$

Transient solution

Steady solution

$$x(t) = A_h e^{-bt/2m} \sin(\omega' t + \phi_h) + A \cos(\omega' t + \phi)$$

$$A = \frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega_d^2}}$$

Resonance จะเกิดเมื่อ A มีค่ามากที่สุด

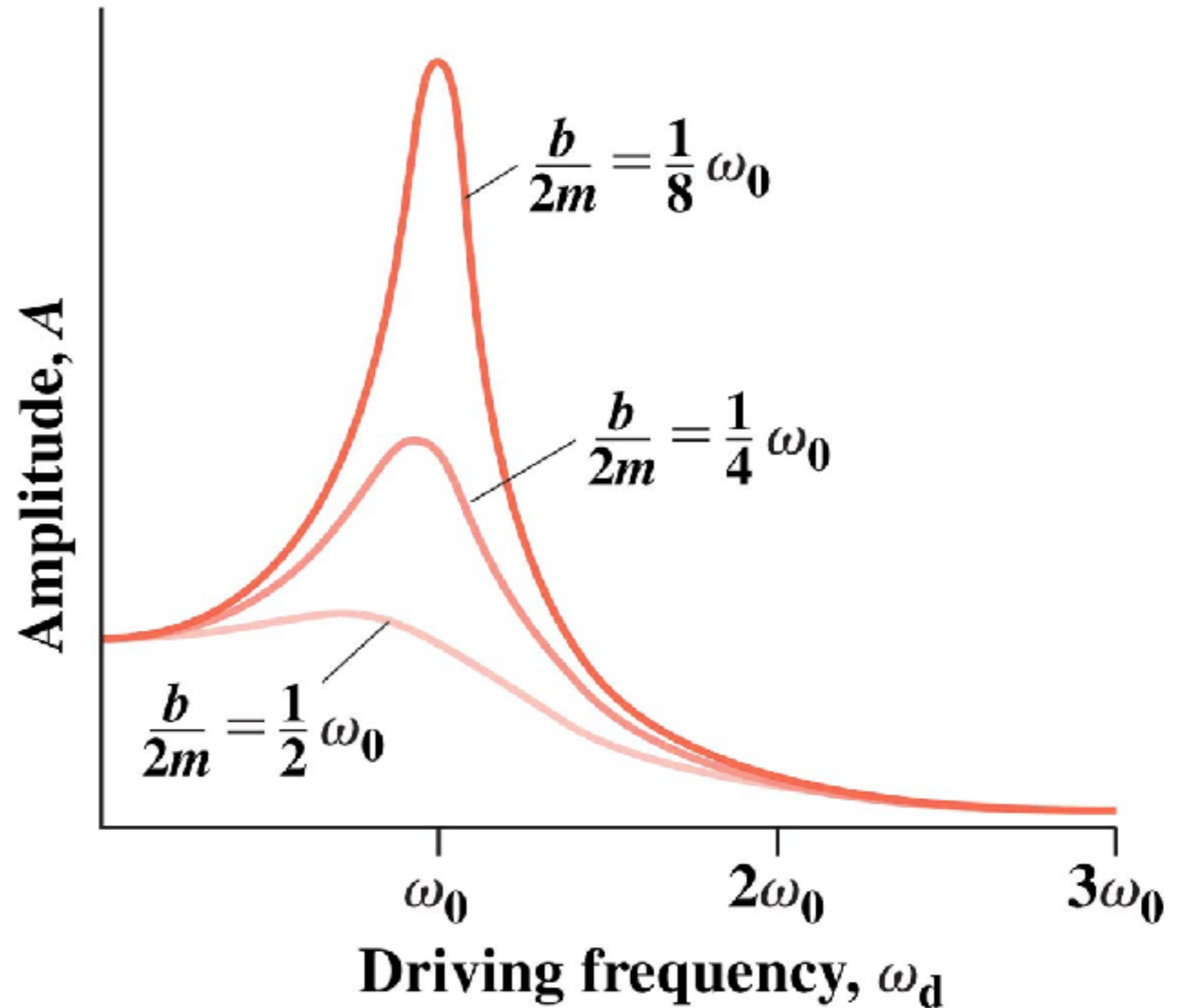
$$\frac{d}{d\omega_d} \left(\frac{(F_0/m)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_d^2)^2 + \frac{b^2}{m^2} \omega_d^2}} \right) = 0$$

$$\text{ได้ว่า } \omega_d = 0 \text{ หรือ } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$

ไม่ใช่สิ่งที่เราสนใจ

Forced oscillations and resonance

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}}$$



Copyright © 2007 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.

Credit: http://www.physics.louisville.edu/cldavis/phys298/notes/resonance_fig2.jpg

Forced oscillations and resonance

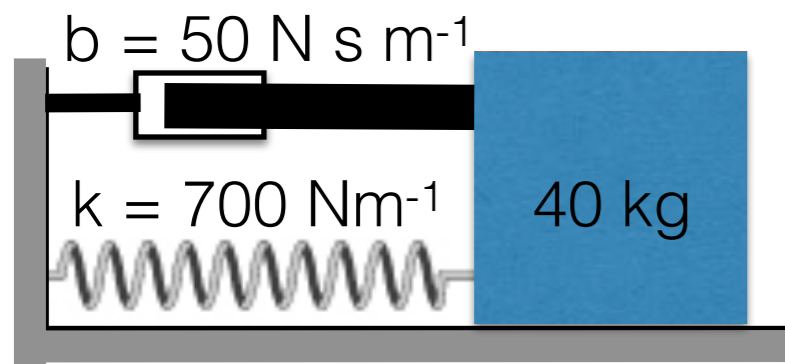
ในการก่อสร้างต่าง ๆ “resonance disaster” บรรยายถึง การถล่มของสิ่งก่อสร้างซึ่งเกิดจากการสั่นที่มีค่าเท่ากับค่า ความถี่ธรรมชาติของสิ่งก่อสร้างนั้น ๆ

- ▶ Failure of the original Tacoma Narrows Bridge
- ▶ Collapse of Broughton Suspension Bridge (due to soldiers walking in step)
- ▶ Collapse of Angers Bridge
- ▶ Collapse of Königs Wusterhausen Central Tower
- ▶ Resonance of the Millennium Bridge
- ▶ Evacuation of the 39-story TechnoMart commercial-residential high-rise in Korea in 2011 due to a class performing Tae Bo exercises to the song "The Power".



Credit: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Albert_Bridge_at_night,_London,_UK_-_Diliff.jpg

ตัวอย่าง



จากระบบดังรูป เมื่อเราไถลกล่องบนพื้นลื่นออกไปเป็นระยะทาง 20 ซม. แล้วปล่อย จงหาว่า (1) จะเกิดการ damping แบบใด จงแสดงวิธีคำนวณ และหากเป็น Underdamping จะเกิดด้วยความถี่เท่าไร

(2) ถ้าต้องการภายหลังการปล่อยกล่อง กล่องกลับสู่จุดสมดุลเร็วที่สุดโดยไม่เกิดการสั่น จะต้องเปลี่ยนแปลงค่า damping constant เป็นเท่าใด